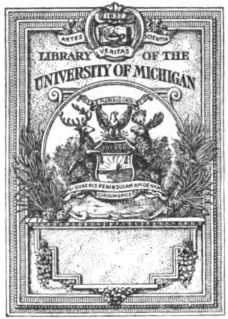
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
ARTES
VERITAS
SCIENTIA

Viro Iuveni ornatissimo, d. Kau,
deliciis Matris optimae aeque ac Do-
ctorum suorum academicorum munusculum
hocce cum voto omnigenae prosperitatis
offert

Io. Frid. Breyer.

Euklids Data,

verbessert und vermehrt

von

Robert Simson,

aus dem Englischen übersezt,

und mit einer Sammlung geometrischer,

nach der Analytischen Methode der Alten aufgelößter Probleme begleitet,

von

Johann Christoph Schwab,

Professor der Philosophie an der Herzogl. Militär-Akademie in Stuttgart.

Stuttgart,

bey Christoph Friderich Cotta, Hof- und Canzley-Buchdrucker.

1780.

C. Rau.

Vorrede.

Der Anlaß zu dieser Schrift ist folgender. Ich las vor mehrern Jahren die Quæstiones Geometricas, oder die Anwendung der Algebra auf die Geometrie in Newtons Aritmethica Universali; und hatte es in der Auflösung seiner geometrischen Aufgaben bereits so weit gebracht, daß ich viele davon auflösen konnte, ohne meinen Autor zu Rathe zu ziehen. Ich fieng alsdann an, mir selbst geometrische Fragen vorzulegen, damit, wenn es mir gelünge, dieselben

ben aufzulösen, ich alles als mein Eigenthum ansehen könnte. Eines Tags, als ich das 4te Buch des Euklids von Ein- und Umschreibung der Figuren einem meiner Schüler zu erklären hatte, fiel es mir ein, mir folgendes Problem zu geben: **in ein gegebenes Dreyek ein Dreyek einzuschreiben, das einem gegebenen Dreyek ähnlich sey.** Ich sezte, um mir die Auflösung zu erleichtern, **eine Seite des einzuschreibenden Dreyeks sollte mit der Grundlinie des gegebenen parallel seyn.** Ich bediente mich, nach meiner Gewohnheit, der Algebra, und überschikte meine Auflösung dem Herrn le Sage in Genf, in dessen Nachbarschaft ich mich damals aufhielt. Dieser Gelehrte, der mit dem edelsten Herzen die Sagacität eines erfinderischen Geistes verbindet, war mit meiner Auflösung und der daraus hergeleiteten Verzeichnung nicht unzufriezufrieden, überschikte mir aber eine, die weit simpler und zierlicher war als die meinige, und die blos auf zween bekannten Säzen der Elementar-Geometrie beruhet: sie befindet sich unter den Aufgaben des zweyten Theils dieses Werks. Ich schämte mich, die Algebra da gebraucht zu haben, wo ich mit der gemeinen Geometrie hätte fortkommen können: ich sah, daß es mir gegangen war wie einem, der nicht genug eigenthümliche Kraft hat, eine kleine Last empor zu heben, und dazu eine Maschine gebraucht.

Die **Data** des **Euklides** hatte ich damals noch nicht gelesen; sie waren mir nur dem Namen nach bekannt: ich erfand mir also eine eigene Methode, die geometrischen Probleme aufzulösen. Anfänglich übte ich mich bloß an sehr leichten Aufgaben, abstrahirte mir aber davon Regeln und Kunstgriffe, wodurch ich auch die schwehrern finden konnte. Endlich las ich die

Data des Euklides selbst, nach der Ausgabe des Robert Simson, eines Schottischen Geometers, der eine vorzügliche Stärke in der Analysis der Alten hatte; ich fügte ihnen noch einige andere Schriften der Engländer bey, und erlangte dadurch von Tag zu Tag eine grössere Fertigkeit in der analytischen Methode, so daß ich endlich Probleme auflößte, wozu ich vorher die Hülfe der Algebra für unentbehrlich gehalten hatte.

Ueberall, wo ich eine Aufgabe fand, versuchte ichs, eh ich die von dem Autor gegebene Construction zu Rathe zog, sie nach meiner analytischen Methode aufzulösen. Sehr oft gelang es mir, daß ich auf eben die Auflösung, wie mein Autor, gerieth; bisweilen fand ich eine längere, bisweilen hatte ich das Vergnügen, eine kürzere und simplere zu finden. Man wird hievon Beyspiele unter den dreyßig Aufgaben antreffen, die den zweyten und praktischen Theil dieses Werkchens ausmachen. Ich hatte einen weit grössern Vorrath von dergleichen Problemen; allein aus Besorgniß, das Werk möchte durch eine grössere Sammlung allzusehr anwachsen und zu theuer werden, habe ich nur dreyßig davon gewählt, und zwar, den Anfängern zu lieb, nicht die schwehrsten: viele davon stehen am Ende der Algebra von Thomas Simson; die Analysis aber samt einigen andern Zusätzen ist immer von mir.

Die Data, ein kostbarer Rest der Geometrie der Alten, befinden sich nicht in allen Ausgaben des Euklids; und da, wo sie sind, haben sie die Correction und die gute Ordnung nicht, in der sie nach der Verbesserung des Robert Simson hier erscheinen. Ich habe sie mit der sorgfältigsten Genauigkeit übersezt, auch hie und da Anmerkungen beygefügt. Die Zeichen, wodurch wir die Gleichheit, die Zusammenfügung, die Hinwegnehmung, die Vervielfältigung, die Verhältnis u. s. w. der Grössen ausdrücken, hat Simson überall vermieden, vermuthlich, weil er sich dadurch an der Methode der Alten, die er einmal zum Muster genommen hatte, zu versündigen glaubte. Allein meines Erachtens dient ein mäßiger Gebrauch der Zeichen nicht nur, den Vortrag abzukürzen, sondern auch, die Operationen faßlicher und sinnlicher zu machen. Denen, die mir den Vorwurf machen möchten, daß ich den Datis des Euklids eine algebraische Form gegeben, würde ich antworten, daß das Wesen der auf die Geometrie angewandten Algebra nicht so wohl in dem Gebrauche der Zeichen, als vielmehr darinn besteht, daß die Linien und Figuren als Zahlen angesehen und arithmetisch behandelt werden: welches von mir eben so wenig als von Simson geschehen ist.

In dem Anhang, den Simson den Datis beygefügt, giebt er die Gründe an, warum er theils den Ausdruk, theils die Ordnung einiger Sätze geändert, auch einige neue hinzugethan; er zeigt, daß selbst Gregory in seiner verbesserten Edition der Data, sich hie und da geirret hat. Da diese Anmerkungen zum Verständniß der Data nicht nothwendig sind, auch die gemachten Veränderungen sich durch den guten Zusammenhang der Sätze hinlänglich rechtfertigen; so habe ich durch Beyfügung des Anhangs das Werkchen nicht vergrössern wollen.

An dem Rande werden entweder die Data selbst, oder die Anfangsgründe des Euklides citirt: in diesem Fall steht immer dat. dabey; in jenem deutet die erste Zahl den Satz, die zweyte das Buch an. Die ganz gemeinen Sätze habe ich gar nicht citirt,

tirt, weil ich voraussetzen konnte, daß sie auch Anfängern bekannt seyn.

Nur noch ein Wort von dem Nutzen dieser Schrift. Mich dünkt, wenn ein Anfänger die Anfangsgründe der Geometrie in dem **Euklides** oder in dem **Kästner** studirt hätte, so sollte er die **Data** lesen, und an den Aufgaben, die den zweyten Theil dieses Werkchens ausmachen, seine Kräfte versuchen. Er würde sich dadurch nicht nur in der Elementar-Geometrie festsetzen, sondern zugleich, durch einige Bekanntschaft mit der Analyse der Alten, sich den Weg zur algebraischen Geometrie bahnen. Dieses wird noch mehr aus folgender Abhandlung erhellen.

Gedan-

Gedanken
über die Analysis.

§. 1.

Um von dem Satz A auf den Satz E zu kommen, muß ich oft die Sätze B, C, D durchdenken: es kann nämlich geschehen, daß in meinem Ideen-System A mich nicht unmittelbar auf E, sondern auf B, B auf C, C auf D, D auf E führt, und daß ich nur durch diese Mittelsätze von A auf E kommen kann.

Entwiklung des Begrifs Analysis.

§. 2.

Wie ich mit A anfangen, und vermittelst B, C, D auf E kommen kann; so kann ich auch mit E anfangen, und forschen, woraus E unmittelbar folgt: und wenn ich so den Satz D gefun-

gefunden habe, weiter forschen, woraus D unmittelbar folgt, und so den Satz C finden: und dieses Forschen kann ich so weit treiben, bis ich auf A gekommen bin. In beyden Fällen werde ich die Verknüpfung (oder den Widerspruch) der Sätze A und E gefunden haben. Diese Erforschung der wechselseitigen Beziehung oder Abhängigkeit zweyer Sätze oder zweyer Begriffe, durch Mittelsätze oder Mittelbegriffe, wird die Analysis genannt.

§. 3.

In wie fern die logische Bedeutung des Wortes mit der etymologischen übereinkömmt.

In so fern A einfacher ist als E, kömmt die Benennung eigentlich dem zweyten Verfahren zu; denn da wird E in A aufgelöst. Man kann aber, insonderheit in der Geometrie, den Satz E als schon eingewickelt in dem Satz A, ansehen, folglich läßt sich auch das erste Verfahren eine Analysis nennen. In dem Begrif eines rechtwinklichten Dreyeks, und den auf seinen Seiten beschriebenen Quadraten, liegt schon der Satz, daß das Quadrat der größern Seite den beyden Quadraten der kleinern Seiten gleich ist, und wird durch die Erforschung der Mittelsätze gleichsam nur herausgewickelt.

§. 4.

§. 4.

Es erhellt, daß die Analysis bey Lehrsätzen so wohl als bey Aufgaben Statt findet. Bey einem Lehrsatz sagt man mir, was zwischen A und E für eine Beziehung ist, und ich soll die Mittelbegriffe finden, woraus dieselbe deutlich eingesehen wird. Bey dem Lehrsatz: die drey Winkel eines Dreyeks machen zusammen zween Rechte, muß ich die Mittelsätze finden: wenn zwo Parallel-Linien von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind die Wechselswinkel einander gleich: und, Nebenwinkel sind zween Rechten gleich: denn aus der schiklichen Verbindung dieser Sätze mit dem, was vorausgesezt wird, erhellt die Gleichheit der drey Winkel mit zween Rechten.

Die Analysis findet bey Lehrsätzen,

§. 5.

Bey einer Aufgabe kommt es gleicherweise darauf an, einen Begrif aus dem andern herzuleiten. Bey der Aufgabe: von einem gegebenen Punct an einen Kreis eine Tangente zu ziehen, soll ich aus der Größe des Kreises und seiner Lage gegen den gegebenen Punct die Tangente bestimmeu; folglich muß ich auch hier die Mittelbegriffe erforschen, wodurch ich auf

und bey Aufgaben Statt.

die Tangente geführt werde, das ist, ich muß analysiren.

§. 6.

Etwas von der Analysis der Lehrsätze.

Da meine Absicht hier nicht ist, von der Analysis der Lehrsätze zu handeln; so will ich nur eine Anmerkung darüber machen. Man weiß, daß bey dem Beweise eines Lehrsatzes gemeiniglich das schwehrste ist, die Vorbereitungs-Linien zu ziehen, worauf zum Theil die Erfindung der Mittelbegriffe beruht. Diese Linien werden oft durch das zweyte Verfahren (§. 2.) besser gefunden als durch das erste. So kann ich, wenn ich über den Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes nachdenke, mich gleich anfangs fragen: woraus fließt die Gleichheit des Quadrates der Hypothenuse mit den beyden Quadraten der zwo übrigen Seiten? — offenbar daraus, daß ein Theil des Quadrates der Hypothenuse dem Quadrate der einen Seite, und der andere Theil dem Quadrate der andern Seite gleich ist. Hieraus folgt, daß ich das Quadrat der Hypothenuse theilen muß, und weil ich es mit Quadraten, mithin mit Parallelogrammen zu thun habe, so ist der nächste Gedanke, daß ich das Quadrat der Hypothenuse in Parallelogramme theile. Da ich aber leicht voraussehen kann, daß ich durch eine auf gerathe wohl gemachte

gemachte Theilung nichts herausbringen werde; so kann ich durch diese Betrachtung darauf kommen, von dem rechten Winkel des Dreyeks, wo ein merkwürdiger Punct ist, die bekannte Parallel-Linie zu ziehen, auf welcher die Erfindung der übrigen Mittelbegriffe beruht. Eben so kann ich bey dem 32sten S. 1. B. Elem. folgendermaassen analysiren: Soll der äussere Winkel eines Dreyeks den beyden innern entgegengesezten gleich seyn, so muß ein Theil desselben dem einen innern, der andere Theil dem andern innern gleich seyn; ich muß also den äussern Winkel in zween Theile theilen, und weil es hier auf die Gleichheit der Winkel ankömmt, so wird die theilende Linie wohl eine mit der gegenüberstehenden Seite des Dreyeks parallele Linie seyn müssen. So habe ich, indem ich mit E anfing, die Vorbereitungs-Linie gefunden, die mich zum Beweise meines Lehrsatzes führt. Eben dieses ließe sich auch an schwehrern Lehrsätzen zeigen.

§. 7.

Insgemein rechnet man zu einer geometrischen Aufgabe weiter nicht als drey wesentliche Stücke; den Satz, der anzeigt, was gegeben ist und was zu thun gefodert wird; die Construction, wodurch der Forderung ein Genüge geschieht, und den Beweis, worin dargethan wird, — Von den wesentlichen Theilen einer geometrischen Aufgabe.

daß der Forderung durch das Verrichtete wirklich ein Genüge geschehen ist. Der Satz fragt; die Construction antwortet; der Beweis zeigt, daß die Antwort richtig ist: Construction und Beweis werden mit einem gemeinschaftlichen Namen Composition genannt. Man sieht aber leicht, daß, wenn man über eine Aufgabe selbst nachdenken will, zwischen den Satz und die Construction ein vierter wesentlicher Theil, die Analysis, einzuschieben ist, weil ohne sie (§. 5.) die Construction nicht gefunden werden kann.

§. 8.

Allgemeine Regel der Analysis Geometrischer Aufgaben.

In der That hängt von der Analysis alles ab; ist sie gut gemacht, so ist das Problem so viel als aufgelöst, und es hat mit der Composition keine sonderliche Schwierigkeit mehr. Es bietet sich also hier die wichtige Frage dar: wie ist die Analysis einer Aufgabe anzustellen? Die allgemeine Regel fließt aus dem Begrif, den wir (§. 2.) davon gegeben haben, und wird ohngefehr so lauten: Man bemerke sorgfältig alle im Satz gegebenen Dinge; forsche nach, was für andere Dinge damit gegeben seyen, und aus diesen leite man wieder andere Dinge her, bis man endlich findet, daß das Gesuchte gegeben oder bestimmt ist. Auf diese Art hat man

die-

die Mittelbegriffe zwischen den gegebenen und gesuchten Dingen entdekt, und die Analysis ist gemacht. Es läßt sich aber nach eben diesem §. auch folgende Regel geben: man erwäge, was man unmittelbar zu finden hat, um das Gesuchte zu finden; hat man es bemerkt, so forsche man ferner nach, wodurch dieses bestimmt werde? und so finde man immer aus dem, was bestimmt werden soll, das Bestimmende, bis man auf den ersten Bestimmungs-Grund, das ist, auf das Gegebene oder die Hypothese des Satzes stößt: so ist die Analysis gleicherweise gemacht.

§. 9.

Gebrauch der Data des Euklides bey der Analysis einer Aufgabe.

Man heisse das Gegebene bey einer Aufgabe A, und das Gesuchte X, und setze, die Anzahl der Mittel-Begriffe sey etwas groß; so ist es ohne zweifel für den Analysten eine Erleichterung, wenn er nicht nöthig hat, sie alle zu durchdenken, um zu X zu gelangen. Gesezt nun, die Mittelbegriffe zwischen A und X seyen α, β, γ, B, δ, ε; der Analyst aber wäre aus irgend einem Buche gewiß, daß wenn A gegeben ist, auch B gegeben sey, und wenn B gegeben ist, auch X gegeben sey; so hätte er nicht nöthig, die Begriffe α, β, γ, δ, ε, zu durchdenken, sondern er dürfte sich nur auf die Sätze jenes

Buches berufen, und seine Analysis auf den Mittelbegrif B einschränken. Ein solches Buch nun sind die Data des Euklids; eine Sammlung von Sätzen, wo gezeigt wird, daß, wenn gewisse Dinge gegeben werden, auch andre mit ihnen gegeben sind; ein Magazin von Elementar-Problemen, das dem Analysten bey etwas verwickelten Aufgaben eben die Dienste thut, wie das von Elementar-Theoremen bey etwas verwickelten Lehrsätzen: bey beyderley Sätzen wird ihm die Arbeit erleichtert und abgekürzet. Es versteht sich aber, daß, um die Composition zu bewerkstelligen, die aus den Datis angeführten Sätze müssen nachgeschlagen werden, wenn der Beweis davon dem Gedächtnisse des Analysten nicht gegenwärtig ist.

§. 10.

Wodurch die Analysis erleichtert wird. Beyspiel.

Die Vergleichung der gegebenen und der gesuchten Dinge wird leichter angestellt, wenn man beyde vor Augen liegen hat: die allgemeine Regel der Analysis (§. 7.) wird also besser ausgeübt werden, wann man bey einer geometrischen Aufgabe die Figur auf eine mechanische Art sich so vorzeichnet, als wenn das Gesuchte darin schon bekannt wäre. So gering dieses Hülfsmittel scheinet, so wichtig ist es bey

dem

dem analytischen Geschäft. Gesetzt, ich habe das Problem aufzulösen: an zween, der Lage und Größe nach gegebenen Kreise A, B, eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen (Fig. a.) so ziehe ich die Tangente E D auf eine mechanische Art, ob ich wohl noch nicht weiß, wie ich sie geometrisch zu ziehen habe, bloß um ihre Bestimmbarkeit aus den gegebenen Dingen desto leichter einzusehen.

§. 11.

Vorbereitung zur Analysis.

Es ist aber nicht genug, die Tangente E D zu ziehen; ich muß sie auch mit den gesuchten Dingen in Verbindung bringen, um analysiren zu können: die gegebenen und gesuchten Dinge müssen sich in der Figur gleichsam die Hände bieten. Weil nun die Tangente von der Größe und Lage der Kreise abhängt, so ist nichts natürlicher als an die Berührungspuncte E, D, die Halbmesser A E, B D zu ziehen, die Mittelpuncte A, B zu vereinigen, und A B zu verlängern, bis sie der Tangente E D in C begegne. Man kann diese Operation, wodurch man das Gesuchte mit dem Gegebenen durch Zeichnung in Verbindung bringt, die Vorbereitung zur Analysis nennen: sie ist der erste Schritt dazu.

§. 12.

§. 12.

Wirkliche Analysis der zum Beyspiel genommenen Aufgabe.

Nun bemerke ich, daß, um die Tangente zu bestimmen, einer von den Puncten E, D, C muß bestimmt werden; denn wenn einer bestimmt ist, so sind die übrigen bestimmt. Ich will mein Augenmerk auf den Punct C richten, weil er in der Verlängerung der, der Lage und Größe nach gegebenen, A B liegt. Um diesen zu finden, muß ich entweder die Größe von BC oder von AC finden. Ich betrachte die Figur, und bemerke, daß, weil ED eine Tangente beyder Kreise seyn soll, E und D rechte Winkel [a], folglich AE und BD parallel seyn müssen [b]; mithin bekomme ich folgende Proportion [c] A E : D B = A C : C B. Nun sind AE, BD gegeben [d], weil die Kreise der Größe nach gegeben sind, folglich [e] ist ihre Verhältnis gegeben; mithin ist A C : C B gegeben, mithin [f] auch AB : B C; nun ist A B gegeben, folglich auch [g] B C, und der Punct C ist gegeben [h].

a 18. 3.
b 28. 1.
c 4. 6.
d 6. def. dat.
e 1. dat.
f Cor. 6. dat.
g 2. dat.
h 20. dat.

§. 13.

Composition der vorgelegten Aufgabe.

Aus dieser Analysis läßt sich nun folgende Composition herleiten. Zu der Differenz der

Halb=

Halbmesser (man sezt hier, die gegebenen Kreise seyen ungleich,) AF — BD, dem kleinern Halbmesser BD, und der Entfernung der Mittelpuncte AB suche man[i] eine vierte Proportional- i 12. 6.
linie, und verlängere AB, bis BC derselben gleich ist. Von C ziehe man[k] eine Tangente k 17. 3.
an den Kreis B; ich sage, sie wird verlängert auch den Kreis A berühren.

Um dieß zu beweisen, ziehe man von B an den Berührungspunct D den Halbmesser BD, und von A an die verlängerte CD die mit BD parallele AE, so ist[l] AC : BC = AE : l 4. 6.
BD; nun ist (constr.) AF — BD : BD = AB : BC, mithin[m] AF : BD = m 18. 5.
AC : BC, folglich AF : BD = AE : BD; mithin[n] ist AE = AF, das ist, AE ist ein n 9. 5.
Halbmesser, folglich[o] berührt CD den Kreis A o 18. 3.
in E[p]. W. Z. E. p Cor. 16. 3.

Man sieht hieraus, daß das Verfahren (§. 12.) das umgekehrte von diesem ist; denn wie ich daselbst geschlossen: wenn ED eine Tangente beyder Kreise ist, so muß BC die vierte Proportionallinie zu AF — BD, BD, AB seyn; so schliesse ich nun hinwiederum: wenn BC nach dem gefundenen Werth gezogen wird, so kann von C eine Tangente an beyde Kreise gezogen werden, oder die von C an den Kreis B gezogene Tangente wird verlängert, auch den Kreis A berühren. So wird, was bey der Analysis der lezte Schritt war, der erste bey der Composition.

§. 14.

Von den Analytischen Kunstgriffen.

Eine nach (§. 10) angestellte Vorbereitung kann oft zu einer verwickelten Analysis führen, woraus gemeiniglich eine verwickelte Composition entsteht: in diesem Fall muß man das Gesuchte mit dem Gegebenen durch Zeichnung in eine andere Verbindung zu bringen suchen; denn die Zierlichkeit der Geometrischen Auflösungen besteht in der Simplicität und Leichtigkeit der Operationen (*). Besondere Regeln lassen sich hier nicht geben, sondern ein jeder muß durch die

(*) So geräth man bey der vorhergehenden Aufgabe auf eine kürzere Construction, wenn man BL parallel mit CE zieht; denn alsdann ist AL gleich dem Unterschiede der Halbmesser, mithin gegeben, und das △ ABL ist gegeben; woraus sich das Uebrige finden läßt. Sie befindet sich samt der Analysis in Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der angewandten Mathem. Opt. §. 10. woraus zugleich erhellt, daß der Satz in der Astronomie seinen Nutzen die Uebung und das Studium der von großen Meistern gegebenen Beyspiele, sich selbst Analytische Kunstgriffe erwerben. Wenn man aber mit den Datis vertraut ist, und die Verhältnis wahrnimmt, worin das vorgelegte Problem mit einigen Sätzen derselben steht, so wird man bald einsehen, wie die Vorbereitung zu machen ist. Sonst läßt sich das, was Newton in seiner Arithm. Vniv. Sect IV. C. I. §. 17. sagt, auch hier anwenden: Schemata plerumque sunt construenda, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status problematis, & theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte, ut concurrentes constituant triangulum, cujus anguli & proinde laterum ratio dantur. Vel si quilibet angulus detur,

Nutzen hat. Ich habe das Problem nach meiner Art aufgelöst, weil mich meine Analysis wirklich auf diese Composition geführt hat. Auch in meiner Composition ließe sich über B C als dem Durchmesser ein Kreis beschreiben, der den Kreis B in D schneiden, und dadurch den Punct D auch bestimmen würde.

aut ſit alicui æqualis, triangulum ſæpe complemus ſpecie datum, aut alicui ſimile, idque vel producendo aliquas ex lineis in ſchemate vel ſubtenſam aliter ducendo. Si triangulum ſit obliquangulum, in duo rectangula ſæpe ſolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, reſolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales, & ſic in cæteris; ad hanc metam ſemper collimando, ut *ſchema in triangula vel data vel ſimilia, vel rectangula reſolvatur.* Die in dem praktiſchen Theile dieſes Werkchens aufgelöſten Probleme werden für Anfänger hierinnen lehrreiche Beyſpiele ſeyn.

§. 15.

Beſtimmung der Aufgabe.

Wenn man gewieſen hat, wie die Tangente CE zu ziehen iſt; ſo hat man der Aufgabe, die weiter nichts foderte, ein Genüge gethan. Man könnte aber ferner fragen, ob es nur eine einzige Linie gebe, die die beyden Kreiſe berührt? und wenn es mehr als eine giebt, wie viel? Man ſieht leicht, daß es auf der andern Seite von AB eine, der CE gleiche Tangente giebt; und daß ſich noch ein Paar andere ziehen laſſen, die die Linie AB ſchneiden.

Be=

Berühren die gegebene Kreise einander, so fallen die zwo leztern Tangenten in eine zusammen, und es giebt in allem nur drey. Schneiden aber die gegebenen Kreise einander, so giebt es weiter nicht als zwey.

Ferner ist eine Aufgabe oft so beschaffen, daß die gegebenen Dinge nicht ganz willkührlich sind, und so können angenommen werden, daß sie nicht beysammen bestehen können; in welchem Fall es unmöglich ist, die Aufgabe aufzulösen. Wenn z. E. gefodert wird, mit drey gegebenen geraden Linien ein Dreyek zu verzeichnen, so können bekanntermaassen die drey Linien eine solche Verhältnis gegen einander haben, daß es unmöglich ist, ein Dreyek damit zu verzeichnen.

Diesen Zusatz, worin gezeigt wird, auf wie vielerley Art die vorgelegte Frage kann beantwortet werden, und in wie fern die Antwort möglich ist, samt einigen andern hieher gehörigen Dingen, heisse ich die Bestimmung der Aufgabe: sie ist den meisten, in dem zweyten Theile dieses Werkchens enthaltenen Aufgaben, wo sie Statt fand, beygefügt worden.

§. 16.

§. 16.

Berechnung der Aufgabe.

Endlich kann man noch fragen: wenn die beyden Halbmesser, und die Entfernung AB mit einem gemeinschaftlichen Maaße gemessen und in Zahlen ausgedrükt werden, wie viel von diesem Maaß auf BC, CD, CE geht? Ferner wie viel die Winkel C, DBC Grade, Minuten u. s. w. haben.? Das ist, wenn ich die geometrische Verzeichnung gefunden habe, so kann ich die gefundenen Linien und Winkel berechnen. Diese Operation heiße ich daher die Berechnung der Aufgabe: sie wird gemeiniglich durch die Trigonometrie bewerkstelliget. Die Berechnung hat ihren Nutzen, weil Linien und Winkel, in Zahlen ausgedrükt, zur Praxi oft brauchbarer sind, als wenn sie durch blosse geometrische Zeichnung sind gefunden worden. Ich habe die Berechnungen meiner Aufgaben nicht wirklich gemacht, sondern nur angezeigt wie sie zu machen sind: es wird aber dem, der die Trigonometrie ein wenig inne hat, nicht schwer seyn, sie nach der angezeigten Methode zu bewerkstelligen. Dergleichen Berechnungen lassen sich auch bey den Sätzen der Data anbringen. Herr Hofrath Kästner hat die Gütigkeit gehabt, mir ein Muster davon zu übersenden

senden, das ich meinen Lesern hier mittheilen will: es betrift den 99sten Satz in dieser Ausgabe, (Fig. 101.) welcher in andern Ausgaben der 95ste ist.

Im Durchmesser BC ist D nach Gefallen genommen, DA willkührlich gezogen, AE senkrecht auf DA, und EFG mit DA parallel: so ist der Punct F gegeben, und das Rechtek DA×EG ist gegeben.

1.) Vorläufig erhellt, daß G = DAG.

2.) AEG = 90_0, also ist AG ein Durchmesser.

3.) Ist also H der Mittelpunct, so haben die Dreyecke DHA, FHG, an den gleichen Seiten HA, HG, gleiche Winkel liegen, DHA = FHG, DAH = G; also ist FH = HD, folglich ist F gegeben weil D gegeben ist.

4.) Es sey HD = a, der Halbmesser = r, HDA = β; diese drey Größen sind unmittelbar gegeben.

5.) Man nenne DAH = γ, so hat man $\sin\gamma = \frac{a}{r} \cdot \sin\beta$; dieser Winkel ist also gefunden.

6.

6. folglich findet man:

$$AD = \frac{r. \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$$

7. auch (3) $GE = 2r. \cos\gamma$

8. Folglich $AD \times GE = 2r_2.$

$$\frac{\cos\gamma. \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$$

§. 17.

Unterschied der geometrischen und algebraischen Analysis.

Man wird hieraus schon abnehmen können, worin die geometrische Analysis von der algebraischen unterschieden ist. Beyde kommen darin mit einander überein, daß sie das Gesuchte aus dem Gegebenen durch Mittelbegriffe zu bestimmen suchen; daher sie auch die gemeinschaftliche Partial-Benennung Analysis haben. Allein darin sind sie wesentlich unterschieden, daß die geometrische Analysis alles durch Zeichnung verrichtet, die Figur immer im Gesichte behält, und dabey die Linien immer als Linien, die Figuren immer als Figuren behandelt: die algebraische Analysis hingegen geht mit Linien und Figuren als mit Zahlen um; wendet daher die in der allgemeinen Arithmetik festgesezten Regeln auf sie an; eilt zu Glei-

Gleichungen, und wickelt, ohne mehr an die Figur zu gedenken, durch Auflösung dieser Gleichungen, die gesuchte Grösse heraus. Diese Unterscheidungs-Charaktere besser ins Licht zu setzen, will ich folgendes leichtes Beyspiel geben.

§. 18.

Gesezt man soll auf eine geometrische Art die Linie AB (Fig. b.) in zwey Segmente theilen, so daß das Quadrat des größern gleich sey dem Rechtek, das aus der ganzen und dem kleinern Segmente formirt wird: so nimmt der Analyste den zu findenden Punct H aus obigem Grunde (§. 10.) als bekannt an; beschreibt über A B das Quadrat AD; zieht HK mit BD parallel, um das verlangte Rechtek vor Augen zu haben; und verlängert K H und C A, um A G, das Quadrat des Segmentes AH, zu bekommen: so ist das Gegebene mit dem Gesuchten in Verbindung gebracht (§. 11.) Weil nun AB gegeben ist, so ist das Quadrat AD, das ist, AK + HD gegeben; nun ist HD = AG (hyp.) mithin ist AK + AG, das ist, C G gegeben. Nun halbire man AC in E, so ist[a] CG + AEq = EFq; nun ist CG gegeben, und weil AE, die Hälfte von AC, gegeben ist, so ist A E q gegeben, folglich ist E F q, folglich auch E F gegeben;

Durch ein Beyspiel erläutert.

a 6. 2.

b 4. dat. ben; nun ist A E gegeben, mithin[b] auch A F; nun ist AF = AH, folglich ist der Punct H gegeben.

Hieraus läßt sich leicht die Composition herleiten, die ich, weil sie sich im Euklides[c] befindet, und mir es hier bloß um die Analysis zu thun ist, nicht hersetzen will (*).

c II. 2.

§. 19.

(*) Ich habe mich hier, wie oben (§. 12.) der Zeichen bedient, durch A E q aber nichts anders verstanden als das auf der Linie A E errichtete Quadrat. Bey einer ähnlichen Gelegenheit fragte ich den Herrn Hofrath Kästner, ob es nicht wahrscheinlich sey, daß die Alten bey ihren Analysen sich auch solcher Zeichen bedienten, um sich die allzuhäufige Wiederhohlung ebenderselben Worte zu ersparen? Ich glaube, mir meine Leser verbindlich zu machen, wenn ich ihnen die Gedanken dieses philosophischen Geometers mittheile: " In Euklids arithmetischen Büchern findet man die Zahlen durch Buchstaben angedeutet, freilich nicht mit Buchstaben gerechnet. Ich sollte also wohl glauben, die Alten hätten sich abkürzender Zeichen bey der Analysis bedient. Sie brauchten indessen sie nicht so nöthig als wir, weil sie weniger zu lernen hatten, und sich also der weitläuftigen Ausdruckungen der Sätze mit Worten, konnten gefallen lassen. Daß in Ihrer Aufgabe die Analysis durch den Gebrauch der Zeichen wäre algebraisch geworden, werden vermuthlich alle Engländer sagen, die eben so, geometrische Analysis und Algebra, durch den Calcul unterscheiden. — Eigentlich sind drey Dinge zu unterscheiden. Die geometrische

§. 19.

Der algebraische Analyste nimmt aus eben dem Grund den Punct H als bekannt an, und nennt um mehrerer Bequemlichkeit willen $AB = a$, $AH = x$, mithin $HB = a - x$; weil nun das Quadrat des grössern Segmentes AH gleich seyn soll dem Rechtek aus der ganzen AB in das kleinere Segment HB, so ist $xx = a(a-x) = aa - ax$, folglich $xx + ax = aa$; und wenn man $\frac{aa}{4}$ auf beyden Seiten hinzufügt, $xx + ax + \frac{aa}{4} = \frac{5aa}{4}$, oder $(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{5aa}{4}$, mithin $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5aa}{4}}$, folglich $x = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = a\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$, oder wenn man a zur Einheit annimmt, $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

§. 20.

trische Analysis bey einer dergleichen Aufgaben: die Rechnung mit Buchstaben, bis zu Erfindung der Gleichung: die Auflösung der Gleichung. Das lezte ist eigentlich Algebra. Die Algebra lehrt nicht die Gleichung finden, sondern sie zur Auflösung behandeln. Jenes ist das Geschäft der Analysis, und wenn man deutlich über die Aufgabe gedacht hat, so ist die Buchstaben-Rechnung nur eine Abkürzung der Ausdrücke unserer Schlüsse, wie alle Rechnungen."

)()(

§. 20.

Betrachtung über die zwo Methoden.

Die Verschiedenheit der zwo Analysen fällt in die Augen. Bey jener habe ich die Linie AH durch geometrische Zeichnungen, bey dieser, durch Rechnungen, gefunden. Als ich AB = a, AH = x sezte, so theilte ich, wenigstens in Gedanken, AB in eine gewiße Menge gleicher Theile, und suchte, wie viel davon auf AH gehen; a und x sind also Zahlen, deren Einheit die Linie ist, womit sich AB und AH messen lassen. Hätte ich a und x nicht als Zahlen, sondern als Linien behandelt, so hätte ich bey den Säzen $a(a-x) = aa - ax$, und $xx + ax + \frac{aa}{4} = (x + \frac{a}{2})^2$, mich auf gewiße, in der Geometrie bewiesenen Lehrsäze berufen müßen: das aber thut der Algebraist nicht, und wie sollte er es bey $\frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$ thun können? sondern er verfährt hiebey bloß nach den, in der allgemeinen Arithmetik festgesezten Regeln, die auf der Natur der Zahlen beruhen. Wenn er demnach $x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$ gefunden hat, so hat er eigentlich nicht die Linie AH, sondern die Menge der gleichen Theile gefunden, die von AB auf AH gehen, welches freylich auf eins

hin-

hinaus läuft und zur Praxi noch besser ist. Denn ich kann ja A B, wie jede geometrische Einheit, in so viel gleiche Theile theilen, daß, wenn auch x eine Irrationalzahl ist, ich mich dem wahren Wehrte von AH so sehr nähern kann, als ich zu irgend einem Gebrauche nöthig habe.

§. 21.

Erinnerung über einen Ausdruk in der algebraischen Geometrie.

Ich will hier eine Erinnerung über einen Ausdruk in der algebraischen Geometrie beyfügen. Man habe zwey gleiche Rechtecke; die Grundlinie und Höhe des einen seyen a, b, des andern c, d; so sagt man insgemein, das Rechtek ab ist gleich dem Rechtecke cd. Mit diesem Ausdrucke verbinden diejenigen, die die Algebra auf die Geometrie anwenden, nicht immer einen deutlichen und richtigen Begrif. Eigentlich will der Ausdruk so viel sagen: das Product aus den zwo Zahlen a, b, ist gleich dem Producte der zwo Zahlen c, d; aber diese Producte drücken die Mengen der kleinen Quadrate aus, die in beyden Rechtecken enthalten sind, und zur Seite das gemeinschaftliche Maaß haben, womit sich die Seiten der Rechtecke messen lassen. Oder kürzer: die Menge der kleinen Quadrate in dem einen Rechtek ist gleich der Menge der gleichen Quadrate in dem andern. Dieses wünschte ich daß Anfänger recht deutlich überdächten, damit sie den Grund des abgekürzten Ausdruks einsehen möchten: das Rechtek a b ist gleich dem Rechtecke c d. Und wenn man dann daraus schließt $a = \frac{cd}{b}$, so heißt dieses wiederum weiter nichts als, die Zahl a ist gleich dem Quotienten $\frac{cd}{b}$; aber alsdann ist die Einheit nicht mehr das kleine Quadrat, womit beyde Rechtecke sich messen lassen, sondern die Seite dieses Quadrates, oder die Linie, womit a, b, c, d sich messen lassen, und $\frac{cd}{b}$ drükt die Menge der Linien aus, die in der Grundlinie des Rechteckes enthalten sind. Man hat also nicht nöthig, hier den gewöhnlichen Begrif der Multiplication zu verlassen, und zu sagen, man multiplicire Linien mit Linien, welches, wenn es nichts ungereimtes sagen soll, einen besondern Begrif der Multiplication voraussezt; sondern man multiplicirt immer Zahlen mit Zahlen, deren Einheit aber eine Linie ist; und das Product derselben, drükt eine Menge Flächen-Einheiten aus (*).

(*) Als ich dieses schrieb, hatte ich die dritte Ausgabe der Anfangsgründe der Geom. von H. Hofrath Kästner, mithin auch den beygefügten 67sten Saz, noch nicht zu Gesichte bekommen. Daselbst heißt es ausdrüklich. „Wenn a, b, c, d, e, f, g, h gerade

§. 22.

Nun will ich noch von den Vortheilen und Inconvenienzen beyder Methoden etwas sagen. Die algebraische Analysis hat den großen Vorzug, daß wenn man durch Erforschung einer Aufgabe einmal auf die Gleichung gekommen ist, alle übrige Operationen nach ohnfehlbarn, in der allgemeinen Arithmetik festgesezten Regeln, vor sich gehen, und also dem, der diese Regeln kennt und sich damit vertraut gemacht hat, sehr leicht seyn müßen; da hingegen bey der geometrischen Analysis eines Problems eine Anstrengung der Aufmerksamkeit bis ans Ende nöthig ist. Nachdem man die Gleichung $xx = aa - ax$, welche ohne vieles Forschen sich hier von selbst darbot, gefunden hatte, so war es für den, der die Regel der Quadratischen Gleichung kennt, ein Spiel, den Wehrt von x zu finden; hingegen brauchte man bey der geometrischen Analysis ein bis ans Ende anhaltendes Nachdenken, um zu zeigen, daß die Linie AH gegeben sey. Vergleichung der zwo Methoden: Vortheil der Algebraischen Analysis.

rade Linien bedeuten, so pflegt man zu sagen, ein Product aus ein Paar solchen Linien bedeute eine Fläche, aus dreyen einen Körper. — Eigentlich sieht man jede solche Linie als eine Zahl an; was man Producte aus Linien nennt, sind Producte aus Zahlen, und ein solches Product zeigt eine Menge von Quadraten oder Würfeln an."

§. 23.

Beantwortung eines Einwurfes wider die geometrische Analysis.

Warum soll man denn, wird man vielleicht hier einwenden, durch die geometrische Analysis mit Mühe bewerkstelligen, was sich durch die Algebra leicht verrichten läßt? Es läßt sich Verschiedenes auf diesen Einwurf antworten. Studirt man die Geometrie nicht bloß um der Ausübung willen, sondern zugleich, um seinen Verstand in Combinirung der Wahrheiten zu schärfen, so muß diejenige Methode, die besonders hiezu geschikt ist, einer andern, wo man die Wahrheiten auf eine beynahe mechanische Art findet, vorgezogen werden. Wer weiter nichts als calculiren und Gleichungen auflösen kann, hat es in der Erfindungskunst noch nicht weit gebracht. Ich kann hier nicht umhin, meinen Lesern aus Herrn Hofrath Kästners Abhandlung: unde plures insint radices æquationibus, Sectiones angulorum definientibus, eine Stelle herzusetzen, worin das, was ich hier behaupte, mit eben so viel Scharfsinn als Witze gesagt wird." Est autem calculis omnibus cum machinis id commune, ut labore singula quae agimus perpetuo ante oculos habendi, nos leuent, ut calculum vel machinam certis legibus tractantes, vel eorum inscii quæ durante operatione fiunt, id tamen quod desideratur obtineant.

ant. DIDEROTUS, aegre ferens quod ad aures chordis artificiose pulsatis demulcendas, digitos fere ab infantia exercitatos habere necesse sit, machinam excogitauit, qua idem præstare possit vel ignarus musices, manubrio axis cuiusdam versato. Qui hac machina, nescius constructionis ejus uteretur, musici elogio omnino non esset ornandus; credo musicos, ut sunt poetæ, & pictores, & omnes fere ingeniosi voluptatum artifices, paulo cerebrosiores, vix eum recepturos, qui machina probe intellecta luderet. Eiusmodi machinæ cum calculo algebraico similitudinem qui animaduertit, is minus mirabitur cur Angli elegantius reputent synthesi aut analysi geometrica uti quam illo; idem etiam algebraicos qui sibi non contemnendi videntur, agnoscet persimiles allobrogibus illis qui per Germaniæ ciuitates ubi maior hominum confluxus est, cursitant, & ad laternæ magicæ miracula aut muris alpini saltus, spectatores machinæ talis, vnde DIDEROTUS suæ ideam sumsisse fatetur, vlulatu inuitant. Quales inprimis illi euadunt, qui elementis Geometriæ obiter ex recentioris cuiusdam scriptoris compendiolo perceptis, neglecta antiquorum lectione, ad algebram quam vocant, grassantur, hoc est calculos litterales utcunque tractare discunt, ad analysin autem ipsam, quæ directrix est calculorum, non pertingunt, quoniam nec ingenium exercitio quodam ad illam formarunt, nec copias eruditionis geometricæ quibus utitur collegerunt, vulgi tamen oculos horrendis illis ſignis a + b — x faſcinant, prudentioribus, abecedarii mathematici, ſæpe iocum, interdum & bilem mouent."

§. 24.

Zweyte Beantwortung.

Ich antworte zweytens auf den gemachten Einwurf, daß viele Aufgaben durch die geometriſche Analyſis leichter und kürzer als durch die Algebra aufgelöſet werden. Hievon wird man Beyſpiele unter den dreyßig Aufgaben finden, die ich dieſem Werke beygefügt habe. Dieß geſchieht inſonderheit, wenn unter den gegebenen Dingen Winkel ſind: da geräth man bisweilen durch die algebraiſche Analyſis auf ſehr verwickelte Gleichungen; hingegen giebt die geometriſche Analyſis leichte Mittel an die Hand, das Geſuchte zu finden. Durch ſie wird alſo die Auflöſung einfach, kurz und zierlich; worauf man bey allen Aufgaben zu ſehen hat.

§. 25.

Dritte Beantwortung.

Drittens hat man ſelbſt bey der algebraiſchen Analyſis eine Vorbereitung nöthig, wovon

von wir oben (§. XI.) geredet haben: sie ist ein wesentlicher Theil davon; und da sie durch die analytische Methode der Alten am besten studirt wird, so erhellet, wie die geometrische Analysis den Weg zur algebraischen bahnet, und also vor dieser studirt werden sollte. Ich glaube, dieses nicht besser als mit den Worten des berühmten **Wolfs** in seinen *Elementis Math. Univ.* T. V. *Cap.* IV. bekräftigen zu können. " Veterum Analysin talem non esse, qua, Algebra inventa, carere possimus, haud difficulter ostenditur. Etenim antequam problemata geometrica vel alia in Mathesi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram solvantur, reducenda sunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo supponit præparationem, methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipsamet per eandem methodum est eruenda. — Optime igitur sibi consulunt, qui methodum Veterum cum algebraica recentiorum conjungunt: & merito dolemus cum *Newtono*, quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc properent, qui inter Mathematicos eminere volunt." Wie wahr dieses sey, kann ich durch mein eigenes Beyspiel versichern. Es ist mir oft wiederfahren, daß, wenn die geometrische Analysis mich auch nicht ganz bis zum Ziel brachte, sie mir doch zu einer einfachern Gleichung verhalf, und mir also die algebraische Auflösung der Frage erleichterte.

§. 26.

Besonderer Vortheil der algebraischen Analysis.

Da die algebraische Analysis die gesuchten Winkel, Linien u. s. w. berechnet (§. 20.) so erhellet, daß sie vornehmlich zur Ausübung dient, wo es oft nöthig ist, diese Größen in Zahlen zu wissen. Die geometrischen Verzeichnungen setzen oft mehrere mechanischen Operationen voraus, bey welchen man immer Gefahr läuft sich zu irren; und dann ist auch die Vollkommenheit unserer Instrumente nicht so groß, daß wir durch Applicirung derselben auf einen Winkel oder eine Linie, gewiß seyn könnten, auch die kleinern Theile, woran uns oft gelegen ist, zu bekommen. Wie unrichtig und unzuverläßig würde man auf solche Art die Verhältnis des Halbmessers zum Umfange des Kreises bestimmen! — Hiebey ist jedoch zu merken, daß, wenn man einmal die geometrische Verzeichnung gefunden hat, die Berechnung der gesuchten Dinge sich gemeiniglich leicht durch die Trigonometrie bewerkstelligen läßt.

§. 27.

§. 27.

Des-Cartes und andere haben gezeigt, wie man die Gleichungen geometrisch construiren könne. So sinnreich dieses ist, so wenig scheint es dem Zwecke gemäß, den man sich bey Anwendung der Algebra auf die Geometrie, vorgesezt hat: da dieser ist, die gesuchten Dinge in Zahlen zu bekommen; so ist alles gethan, wenn man die Gleichung aufgelöst hat. Hernach haben die Constructionen, die man durch die Formeln der Gleichungen erhält, gemeiniglich so wenig Simplicität und Zierlichkeit, daß ihnen die aus geometrischen Analysen hergeleiteten Constructionen weit vorzuziehen sind. Man sehe auch, was Herr Hofr. Kästner hierüber sagt, in seiner Analysis endlicher Größen 507. 111.

Gedanke über die Construction der Gleichungen.

§. 28.

Wenn man bey Erforschung einer Aufgabe auf die Gleichung gekommen ist, so verliert man die Figur aus dem Gesicht, und operirt blindlings (*) nach gewißen Regeln: dadurch verliert

Inconvenienz der algebraischen; Vorzug der geometrischen Analysis.

(*) Dieser Ausdruk ist von Leibnitz, der in den Act. Erud. 1684. mens. Nov. sagt: "Plerumque non totam rei simul naturam intuemur, sed rerum loco liert man also die anschauende Erkänntnis der Dinge und ihres Zusammenhanges. Ob man nun schon in der Mathematik nicht, wie in andern Wissenschaften, Gefahr läuft, durch dieses bloß symbolische Denken in Irrthum zu gerathen; so ist doch gewiß, daß der Verstand dadurch nicht so geübt wird, als wenn man die Wahrheiten auf eine mehr anschauende Art verbindet. Dieß thut die geometrische Analysis: sie begnügt sich nicht, durch den angenommenen Leitfaden aus dem Labyrinthe zu kommen; sie bemerkt auch alle Schritte, die sie thut, alle Oerter, wodurch sie geht; und kann daher, wenn sie zum Ziele gelangt ist, das ganze Feld, das sie durchlaufen hat, besser überschauen. Sie ist also geschikter, unser Vermögen, den Zusammenhang der Wahrheiten einzusehen, das ist, unsere Vernunft und unsern Verstand zu üben und zu schärfen. — Die übrigen Vortheile derselben sind in den §§. 23. 24. 25. berührt.

§. 29.

Ob man sagen könne, eine sey der andern vorzuziehen?

Wenn man alles, was wir bey Vergleichung der zwo Methoden gesagt haben, und was sich

loco signis utimur, quorum explicationem in præsenti aliqua cogitatione compendii causa solemus prætermittere, scientes aut credentes, nos eam habere in potestate. — Qualem cogitationem *cæcam* vel etiam *symbolicam* vocare soleo, qua in Algebra & Arithmetica utimur."

sich noch darüber sagen ließe, erwägt; so wird man finden, daß sie Frage: welche von beyden ist der andern vorzuziehen? wegen ihrer Unbestimmtheit auch nicht schlechthin beantwortet werden kann. Wer bey leichten Aufgaben, wo die Anzahl der Mittelbegriffe gering ist, die Algebra gebraucht, ohne den (§. 26.) angeführten Zwek zu haben, der legt wenigstens keinen sonderlichen Beweis von geometrischer Sagacität ab, ob er gleich übrigens sich als einen geschikten Algebraisten zeigen kann. Aber bey verwickelten Aufgaben, wo auch ein scharfer Verstand, durch die angestrengteste Aufmerksamkeit geleitet, Mühe haben würde, alle Mittelbegriffe deutlich zu durchdenken, da ist die Algebra ein vortrefliches, der Eingeschränktheit unsers Verstandes angemessenes Werkzeug; und wer sich derselben gut zu bedienen weiß, der wird immer Proben von geometrischem Scharfsinn geben, und Dinge finden, die er ohne dieselbe niemals würde gefunden haben.

§. 30.

So viel ist also gewiß, daß die geometrische Analysis vor der algebraischen sollte studirt werden; und daß ein Anfänger, von der Elementar-Geometrie nicht gleich zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie, überspringen

soll

soll, ohne vorher durch die geometrische Auflösung vorgelegter Probleme seine Elementar = Geometrie wiederhohlt, seine Verstandeskräfte versucht, und sich in der anschauenden Combinirung der Wahrheiten geübt zu haben. Dann erst wird er, wann er bey der geometrischen Analysis unübersteigliche Schwierigkeiten wird gefunden haben, mit desto größerm Nutzen und Vergnügen den Weg der Algebra einschlagen.

Vor=

Vorrede
von Robert Simson.

Die Data des Euklides sind das erste von den Büchern, die von den alten Geometern geschrieben worden sind, um die analytische Methode zu erleichtern und zu befördern. Ueberhaupt sagt man, ein Ding sey gegeben, wenn es entweder wirklich dargelegt wird, oder gefunden werden kann; das ist, wenn es entweder durch die Hypothese bekannt ist, oder wenn man beweisen kann, daß es bekannt ist; und die Sätze in den Datis zeigen, was für Dinge sich aus denjenigen finden oder kennen lassen, die durch die Hypothese bereits bekannt sind: so daß man bey der Analyse oder Erforschung einer Aufgabe beweiset, daß aus den gegebenen oder bekannten Dingen durch Hülfe dieser Sätze andere gegeben sind, und aus diesen ferner zeiget,

daß

daß andere gegeben sind, und so weiter, bis man endlich beweiset, daß das, was in der Aufgabe zu finden vorgelegt worden, gegeben ist; und wenn dieses gethan ist, so ist das Problem aufgelöst, und die Composition der Figur wird aus den Compositionen der Data, deren man sich in der Analyse bedient hat, hergeleitet und verrichtet. Und so haben die Data des Euklides einen allgemeinen und höchstnothwendigen Gebrauch bey der Auflösung aller Arten von Problemen.

Euklides wird so wohl von den alten als neuern Geometern für den Verfasser des Buches von den Datis gehalten; und es scheint kein Zweifel zu seyn, er habe ein Buch über diese Materie geschrieben, das aber in dem Lauf so vieler Jahrhunderte von ungeschikten Herausgebern in vielen Stellen, so wohl was die Ordnung der Sätze als die Definitionen und Beweise selbst anbelangt, ist verdorben worden. Diese Fehler nun, die sich darin finden, zu verbessern, und ihm die Genauigkeit, mit der es ohne Zweifel von dem Euklides ist geschrieben worden, wieder zu geben, ist der Endzwek dieser Ausgabe, damit es für die Geometer, wenigstens für die Anfänger,

fänger, die die forschende Methode der Alten verlangen kennen zu lernen, nüzlicher gemacht werde. Diesen leztern zu lieb sind die Compositionen von den meisten Datis ihren Beweisen beygefügt worden, damit die Compositionen der durch Hülfe der Data aufgelösten Probleme um so mehr erleichtert würden.

Die Vorrede des Philosophen Marinus, welche in der griechischen Ausgabe den Datis vorgesezt ist, ist hier weggelassen, weil sie gar nicht dient, dieselben zu verstehen. Am Ende derselben sagt er, Euklides habe sich nicht der synthetischen, sondern der analytischen Methode bey seinem Vortrage bedient; worin er sich sehr betrügt, denn bey der Analyse eines Theorems wird die zu beweisende Sache in der Analyse angenommen; hingegen bey den Beweisen der Data wird die zu beweisende Sache, nemlich daß etwas gegeben ist, niemals in dem Beweise angenommen; woraus erhellet, daß jedes davon synthetisch bewiesen ist; wiewohl in der That wenn ein Saz von den Datis in ein Problem verwandelt wird, wie zum Ex. der 84ste oder 85ste in den erstern Ausgaben, welches hier der 85ste und 86ste ist, der

Beweis des Satzes alsdann die Analyse des Problems wird.

Die Data des Euklides.

Definitionen.

I.

Räume, Linien und Winkel heißen der Größe nach gegeben, wenn Räume, Linien und Winkel, die ihnen gleich sind, können gefunden werden.

II.

Eine Verhältnis heißt gegeben, wenn eine ihr gleiche Verhältnis einer gegebenen Größe zu einer gegebenen Größe kann gefunden werden.

III.

Rechtlinichte Figuren heißen der Gattung nach gegeben, wenn jeder ihrer Winkel gegeben ist, und die Verhältnisse ihrer Seiten gegeben sind.

IV.

Punkte, Linien und Räume heißen der Lage nach gegeben, wenn sie beständig einer=

einerley Lage haben, und entweder wirklich dargelegt werden, oder gefunden werden können.

V.

Ein Winkel heißt der Lage nach gegeben, wenn er zwischen geraden, der Lage nach gegebenen, Linien enthalten ist.

VI.

Ein Kreis heißt der Größe nach gegeben, wenn eine aus seinem Mittelpunkt an den Umfang gezogene gerade Linie der Größe nach gegeben ist.

VII.

Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben, wenn sein Mittelpunkt der Lage nach gegeben, und eine daraus an den Umfang gezogene gerade Linie der Größe nach gegeben ist.

VIII.

Kreis-Abschnitte heißen der Größe nach gegeben, wenn die Winkel darin, und ihre Grundlinien der Größe nach gegeben sind.

XI.

Kreis = Abschnitte heissen der Lage und Größe nach gegeben, wenn die Winkel darin der Größe nach gegeben, und ihre Grundlinien beydes der Lage und Größe nach gegeben sind.

X.

Eine Größe heißt um eine gegebene Größe größer als eine andere, wenn nach Wegnehmung der gegebenen Größe, das, was übrig bleibt, der andern Größe gleich ist.

XI.

Eine Größe heißt um eine gegebene Größe kleiner als eine andere, wenn nach Hinzufügung dieser gegebenen Größe, das Ganze der andern Größe gleich ist.

Erklä=

Erklärung der Zeichen.

A B + B C deutet an, daß die zwo Größen A B und B C sollen zusammengefügt, und als Eine Größe angesehen werden.

A B — B C deutet eine Größe an, die übrig bleibt, wenn man B C von A B wegnimmt.

A B = B C deutet an, daß die Größe A B der Größe B C gleich ist.

A B × B C deutet nicht an, daß die Linie A B durch B C soll multipliciret werden, sondern bloß das Rechteck, das A B zur Grundlinie, und B C zur Höhe hat.

A B : B C deutet nicht an, daß A B durch B C soll dividirt werden, sondern bloß die geometrische Verhältnis der Größe A B zu der Größe B C.

A B > B C, das ist, A B ist größer als B C.

A B < B C, das ist, A B ist kleiner als B C.

(A B =) B C, oder kürzer (A B) B C

 muß

muß gelesen werden, A B, das ist, die ihr gleiche B C.

A B C deutet immer einen Winkel, △ A B C ein Dreyek an.

A B q deutet ein, über der Linie A B beschriebenes Quadrat an.

Satz I. (*) 1.

Wenn zwo Grössen gegeben sind, so ist ihre Verhältnis gegeben. Fig. 1.

Es seyen A, B zwo gegebene Grössen; so ist A : B gegeben.

Weil A eine gegebene Grösse ist, so läßt sich [a] eine ihr gleiche Grösse finden; diese sey C. a 1. def.
Eben so läßt sich, weil B gegeben ist, eine ihr dat.
gleiche Grösse finden; diese sey D. Weil nun
A = C, und B = D, so ist [b] A : B = b. 7. 5.
C : D; folglich ist die Verhältnis der gegebenen Grössen C, D, die mit A : B einerley ist, gefunden.

Satz II. 2.

Wenn eine gegebene Grösse zu einer andern eine gegebene Verhältnis hat, "und "wenn zu den zwo Grössen, wodurch die ge"gebene Verhältnis ausgedrükt wird, und "der gegebenen Grösse sich eine vierte Pro"portional-Grösse finden läßt,,; so ist die andere Grösse gegeben. Fig. 2.

Die gegebene Grösse A habe zu der Grösse B eine gegebene Verhältnis; wenn zu den drey genannten Grössen sich eine vierte Proportional-Grösse finden läßt; so ist B der Grösse nach gegeben.

(*) Die Ziffern an dem Rande deuten die Zahlen in den andern Ausgaben an.

a 1. def. Weil A gegeben ist, so läßt [a] sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey C. Und weil A : B gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen E : F. Nun finde man zu den Größen E, F, C eine vierte Proportional-Größe D, welches kraft der Hypothese möglich ist. Da also A : B = E : F, und E : F =
b 11. 5. C : D; so ist [b] A : B = C : D. Nun ist
c 14. 5. A = C, folglich [c] B = D. Mithin ist die
a 1. def. Größe B gegeben, [a] weil eine ihr gleiche D ist gefunden worden.

3.

Satz III.

Wenn gegebene Größen zu einander hinzugefügt werden, so ist ihre Summe gegeben. Fig. 3.

Die gegebenen Größen A B, B C seyen zu einander hinzugefügt; so wird ihre Summe A C gegeben seyn.

a 1. def. Weil A B gegeben ist, so läßt [a] sich eine ihr gleiche Größe finden; sie sey D E; und weil B C gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden; sie sey E F. Weil nun A B = D E, und B C = E F ist, so ist (A B + B C =) A C = (D E + E F =) D F; folglich ist A C gegeben, weil die ihr gleiche D F ist gefunden worden.

Satz

Satz IV. 4.

Wenn eine gegebene Größe von einer gegebenen Größe weggenommen wird, so ist der Rest gegeben. Fig. 4.

Von der gegebenen Größe A B werde die gegebene A C weggenommen; so ist der Rest C B gegeben.

Weil A B gegeben ist, so läßt [a] sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey D E; und weil A C gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey D F. Da nun A B $=$ D E, A C $=$ D F; so ist der Rest C B dem Rest F E gleich. Mithin ist C B gegeben [a], weil eine ihr gleiche F E ist gefunden worden.

a 1. def.

Satz V. 12.

Wenn von drey Größen die erste samt der zweyten, und eben so die zweyte samt der dritten gegeben ist; so ist entweder die erste gleich der dritten, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere. Fig 5.

Die drey Größen seyen A B, B C, C D, wovon A B samt B C, das ist, A C gegeben sey; und gleicherweise sey B C samt C D, das ist, B D gegeben. Entweder ist A B $=$ C D, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere.

Weil

Weil A C, B D, jede für sich, gegeben sind, so sind sie entweder einander gleich, oder nicht. Gesezt, sie seyen einander gleich; weil nun A C = B D, so nehme man den gemeinschaftlichen Theil B C hinweg, so wird der Rest A B dem Rest C D gleich seyn.

Wenn sie aber ungleich sind, so sey A C > B D, und man mache C E = B D. Demnach ist C E gegeben, weil B D gegeben ist; und da die Ganze A C gegeben ist, so ist [a] der Rest A E gegeben; und weil E C = B D, so ist (EC — BC =) EB = (BD — BC =) C D. Weil nun A E gegeben ist, so ist A B grösser als E B, das ist, als C D, um die gegebene Grösse A E.

a 4. dat.

5. ## Saz VI.

Wenn eine Grösse eine gegebene Verhältnis zu einem ihrer Theile hat, so wird sie auch zu dem andern Theil eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 6.

Die Grösse A B habe zu A C, einem ihrer Theile, eine gegebene Verhältnis, so wird sie auch zu dem andern Theil B C eine gegebene Verhältnis haben.

Weil A B : A C gegeben ist, so läßt [a] sich eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Grösse D E zu der gegebenen

a 2. def.

nen DF. Weil nun D E, D F, gegeben sind, so ist [b] der Rest F E gegeben; und weil A B : A C b 4. dat.
= D E : E F, so ist *convertendo* [c] A B : B C c. 19. 5.
= D E : E F; folglich ist A B : B C gegeben, weil die ihr gleiche Verhältnis der gegebenen Größen D E, E F ist gefunden worden.

Zusatz. Hieraus folgt, daß die Theile A C, C B eine gegebene Verhältnis zu einander haben; denn A B : B C = D E : E F, mithin *dividendo* [d] A C : C B = D F : F E; da nun d 17. 5.
D F, F E gegeben sind, so ist [a] A C : C B a 2. def.
gegeben.

Satz VII. 6.

Wenn zwo Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, zusammengefügt werden; so wird die gesammte Größe zu jeder von ihnen eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 7.

Die Größen A B, B C, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, seyen zusammengefügt; so wird die gesammte Größe A C zu jeder von den Größen A B, B C eine gegebene Verhältnis haben.

Weil A B : B C gegeben ist, so läßt [a] sich a 2. def.
eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen D E, E F. Weil nun D E, E F gegeben sind, so ist die gesammte

b 3. dat. sammte D F gegeben[b]; und weil AB:BC = DE:EF, so ist *componendo*[c] AC:CB = DF:FE, und *convertendo*[d] AC:AB = DF:DE; folglich weil AC zu jeder der Größen AB, BC sich verhält, wie DF zu jeder der andern DE, EF, so ist[a] AC:AB, und AC:BC gegeben.

c 18. 5.

d 19. 5.

a 2. def.

Satz VIII.

7.

Wenn eine gegebene Größe in zween Theile getheilt ist, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn zu der Summe der zwo Größen, wodurch die gegebene Verhältnis ausgedrükt ist, zu einer von denselben, und zu der gegebenen Größe, eine vierte Proportional-Größe kann gefunden werden; so ist jeder von den Theilen gegeben. Fig. 8.

Die gegebene Größe AB sey in die Theile AC, CB getheilt, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; wenn zu den im Satze genannten Größen sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt; so sind AC, CB, jede für sich, gegeben.

Weil die Verhältnis AC : CB gegeben ist; so ist[a] auch AB : BC gegeben, folglich läßt sich[b] eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen DE, EF; weil nun die gegebene AB zu BC die gegebene Ver-

a 7. dat.

b 2. def.

Verhältnis D E : E F hat; so ist, wenn zu D E, E F, A B sich eine vierte Proportional-Größe finden läßt, B C gegeben[c]; und weil A B gegeben ist, so ist auch der übrige Theil A C gegeben.[d] c 2. dat. d 4. dat.

Gleicherweise und mit eben der Einschränkung, wenn A C, der Unterschied zweyer Größen A B, B C, die eine gegebene Verhältnis haben, gegeben ist; so ist jede der Größen A B, B C gegeben.

Satz IX. 8.

Größen, die zu ebenderselben Größe gegebene Verhältnisse haben, haben auch eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 9.

A und C haben, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu B, so wird A eine gegebene Verhältnis zu C haben.

Weil A : B gegeben ist, so läßt sich[a] eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen D, E; und weil B : C gegeben ist, so läßt sich[a] eine ihr gleiche Verhältnis finden, es sey die Verhältnis der gegebenen Größen F, G. Zu F, G, E finde man, wenn es sich thun läßt, eine vierte Proportional-Größe H. Weil nun A : B = D : E, und B : C = (F : G =) E : H; so ist *ex æquo* A : C = D : H, folglich ist A : C gegeben[a], weil die ihr gleiche a 2. def.

gleiche D:H ist gefunden worden. Läßt sich aber zu F, G, E keine vierte Proportional = Größe finden, so kann man bloß sagen, daß A:C aus A : B und B : C, das ist, aus den gegebenen Verhältnissen D : E, und F : G zusammengesezt sey.

9. ## Satz X.

Wenn zwo oder mehrere Größen gegebene Verhältnisse zu einander haben, und wenn sie zu einigen andern Größen gegebene, wiewohl nicht einerley Verhältnisse haben; so werden diese andere Größen auch gegebene Verhältnisse zu einander haben. Fig. 10.

Zwey oder mehrere Größen A, B, C, haben gegebene Verhältnisse zu einander, und sie haben zu andern Größen D, E, F gegebene, wie wohl nicht einerley Verhältnisse; so werden die Größen D, E, F auch gegebene Verhältnisse zu einander haben.

Weil A:B gegeben ist, und eben so A:D, so ist[a] D : B gegeben; nun ist B:E gegeben, folglich[a] ist D:E gegeben; und weil B:C, und eben so B:E gegeben ist, so ist[a] E:C gegeben; nun ist C:F gegeben, folglich ist E:F gegeben; folglich haben D, E, F gegebene Verhältnisse zu einander.

a 9. dat.

Satz

Satz XI. 22.

Wenn zwo Größen, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe haben; so werden beyde zusammengenommen eine gegebene Verhältnis zu dieser andern haben. Fig. 11.

Die Größen AB, BC haben eine gegebene Verhältnis zu der Größe D; so wird AC zu ebenderselben D eine gegebene Verhältnis haben.

Weil AB, BC, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu D haben, so ist AB:BC gegeben[a], mithin ist AC:CB gegeben[b]; nun ist BC:D gegeben; folglich ist auch AC:D gegeben.

a 9. dat.
b 7. dat.

Satz XII.

Wenn das Ganze zu dem Ganzen eine gegebene Verhältnis hat, und die Theile zu den Theilen gegebene, aber nicht einerley Verhältnisse haben; so wird jedes davon, das Ganze oder der Theil, zu jedem eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 12.

Das Ganze AB habe zu dem Ganzen CD eine gegebene Verhältnis, und die Theile AE, EB haben gegebene, aber nicht einerley Verhältnisse zu den Theilen CF, FD; so wird jedes davon zu jedem, dem Ganzen oder dem Theil, eine gegebene Verhältnis haben.

Weil AE:CF gegeben ist, so mache man AE:CF = AB:CG, so ist AB:CG
a 19. 5. gegeben, mithin ist EB:FG gegeben, weil [a] EB:FG = AB:CG. Nun ist EB:FD
b 9. dat. gegeben, mithin ist FD:FG gegeben [b]; und
c 6. dat. *convertendo* FD:DG ist gegeben [c]; und weil AB zu jeder der Größen CD, CG eine gegebene Verhältnis hat, so ist [b] CD:CG gegeben; folglich [c] ist CD:DG gegeben. Nun ist GD:DF
d cor. 6. dat. gegeben, mithin [b] ist CD:DF, folglich [d] auch CF:FD gegeben; nun ist CF:AE, wie auch
e 10. dat. FD:EB gegeben; folglich [e] ist AE:EB ge-
f 7. dat. geben, wie auch [f] die Verhältnis von AB zu jeder derselben; folglich ist die Verhältnis von jeder zu jeder gegeben.

24.

Satz XIII.

Wenn die erste von drey geraden Proportional-Linien zu der dritten eine gegebene Verhältnis hat, so wird die erste auch zur zweyten eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 13.

A, B, C seyen drey gerade Proportional-Linien, das ist A:B = B:C; wenn A:C eine gegebene Verhältnis ist, so wird auch A:B eine gegebene Verhältnis seyn.

Weil

Weil $A : C$ gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen geraden Linien D, E. Nun finde man[b] zwischen D und E eine mittlere Proportional-Linie F; so ist $D \times E = Fq$, und weil $D \times E$ wegen der gegebenen Seiten gegeben ist, so ist auch Fq, mithin die gerade Linie F, gegeben; und ferner weil $A : C = D : E$, und[c] $A : C = Aq : Bq$, so ist $D : E = Aq : Bq$; nun[c] ist $D : E = Dq : Fq$, folglich ist[d] $Aq : Bq = Dq : Fq$, folglich[e] $A : B = D : F$; mithin ist $A : B$ gegeben[a], weil die ihr gleiche Verhältnis der gegebenen geraden Linien D, F ist gefunden worden.

a 2. def.
b 13. 6.
c 1, cor. 20. 6.
d 11, 5.
e 22. 6.
a 2. def.

Satz XIV.

A.

Wenn zwo Größen, wovon die eine gegeben ist, zusammengenommen eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe haben; so hat der Ueberschuß dieser andern Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der erstern Größe: und wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so hat diese andere Größe, mit einer gegebenen Größe zusammengenommen, eine gegebene Verhältnis zu der erstern Größe.

Fig. 14.

Die Größe A B samt der gegebenen Größe BE, das ist AE, habe zu der Größe CD eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß von CD über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu AB haben.

Weil AE : CD gegeben ist, so mache man AE:CD = BE:FD; demnach ist BE:FD gegeben, und weil BE gegeben ist, so ist FD
a 2. dat. gegeben[a]. Ferner weil AE:CD = BE:FD,
b 19. 5. so ist[b] AB : CF = AE : CD; nun ist AE : CD gegeben, folglich ist auch AB : CF gegeben; das ist, CF der Ueberschuß von CD über die gegebene Größe FD, hat eine gegebene Verhältnis zu AB.

Nun setze man, der Ueberschuß der Größe AB über die gegebene BE, das ist, AE habe eine gegebene Verhältnis zu der Größe CD; so hat CD, mit einer gegebenen Größe zusammengenommen, eine gegebene Verhältnis zu AB.

Weil AE : CD gegeben ist, so mache man AE : CD = BE : FD, mithin ist BE:FD
a 2. dat. gegeben; nun ist BE gegeben, folglich ist[a] FD gegeben; und weil AE:CD = BE:FD, so ist
b 12. 5. *summando*[b] AB : CF = AE : CD; nun ist AE : CD gegeben, mithin ist AB : CF gegeben, das ist, CF, das der Größe CD samt der gegebenen DF gleich ist, hat eine gegebene Verhältnis zu AB.

Satz

Satz XV. B.

Wenn eine Grösse samt derjenigen, zu der eine andere Grösse eine gegebene Verhältnis hat, gegeben ist; so wird die Summe dieser andern, und derjenigen, zu der die erste Grösse eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn. Fig. 15.

AB, CD seyen zwo Grössen, wovon AB samt BE, zu welcher CD eine gegebene Verhältnis hat, gegeben ist; so wird CD samt der Grösse, zu welcher AB eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn.

Weil CD : BE gegeben ist, so mache man BE : CD = AE : FD, mithin ist AE : FD gegeben, und weil AE gegeben ist, so ist[a] FD gegeben; weil nun BE : CD = AE : FD, so ist[b] AB : FC = BE : CD, und weil BE : CD gegeben ist, so ist AB : FC gegeben; nun ist FD oder FC + CD gegeben, folglich ist CD samt FC, zu welcher AB eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

a 2. dat.

b cor 19. 5.

Satz XVI. 10.

Wenn der Ueberschuß einer Grösse über eine gegebene Grösse, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Grösse hat; so wird der Ueberschuß beyder zusammen über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu dieser andern haben: und wenn der Ueberschuß zwoer Größen mit einander über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer derselben hat; so hat entweder der Ueberschuß der andern über die gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu jener einten, oder die andere samt der Größe, zu welcher jene einte eine gegebene Verhältnis hat, ist gegeben. Fig. 16.

Der Ueberschuß der Größe A B über eine gegebene Größe habe zu der Größe B C eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß von A C, der Summe beyder Größen, über die gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu B C haben.

AD sey die gegebene Größe, und der Ueberschuß von A B über dieselbe, das ist, D B habe zu B C eine gegebene Verhältnis, weil nun
a 7. dat. D B : B C gegeben ist, so ist [a] D C : C B gegeben; nun ist A D gegeben, folglich hat D C, der Ueberschuß von A C über die gegebene AD, eine gegebene Verhältnis zu B C.

Nun aber setze man, der Ueberschuß zwoer Größen A B, B C mit einander, über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu einer derselben BC; so wird entweder der Ueberschuß der andern, nämlich A B, über die gegebene

bene Größe, eine gegebene Verhältnis zu B C haben, oder A B wird samt der Größe, zu welcher B C eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn.

A D sey die gegebene Größe, und man nehme AD < AB an; weil nun DC, der Ueberschuß von AC über AD, eine gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist[b] DB : BC gegeben, das ist, D B der Ueberschuß von A B über die gegebene Größe A D, hat eine gegebene Verhältnis zu B C. [b] cor. 6. dat.

Ist aber die gegebene Größe größer als AB, so mache man AE derselben gleich; weil nun E C, der Ueberschuß von A C über A E, eine gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist[c] B C : B E gegeben; und weil A E gegeben ist, so ist AB samt BE, zu welcher B C eine gegebene Verhältnis hat, gegeben. [c] 6. dat.

Satz XVII. 11.

Wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so wird der Ueberschuß ebenderselben ersten Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu den beyden Größen mit einander haben. Und wenn der Ueberschuß einer von zwo

Größen über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu beyden Größen mit einander hat; so wird der Ueberschuß ebenderselben Größe über eine gegebene, zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 17.

Der Ueberschuß der Größe A B über eine gegebene Größe habe zu der Größe B C eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu A C haben.

A D sey die gegebene Größe; weil nun DB, der Ueberschuß von A B über AD, eine
a 7. dat. gegebene Verhältnis zu BC hat, so ist[a] DC:DB gegeben. Nun mache man D C : D B = A D : D E, so ist A D : D E gegeben; und
b 2. dat. weil AD gegeben ist, so ist[b] DE, mithin auch der Rest AE gegeben; und weil AD:DE =
c 12. 5. DC : DB, so ist[c] AC : EB = DC : DB; nun ist D C : D B gegeben, mithin ist auch A C : E B gegeben; und weil EB : A C, wie auch AE, gegeben ist, so hat EB, der Ueberschuß von A B über die gegebene A E, eine gegebene Verhältnis zu A C.

Nun aber setze man, der Ueberschuß von A B über eine gegebene Größe habe zu A B + B C = A C eine gegebene Verhältnis; so hat der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu BC.

A E

AE sey die gegebene Größe; weil nun EB, der Ueberschuß von AB über AE, eine gegebene Verhältnis zu AC hat, so mache man AC:EB = AD:DE, mithin ist AD:DE gegeben, wie auch[d] AD : AE; und weil AE gegeben ist, so ist[b] AD gegeben. Ferner weil AC:EB = AD:DE, so ist[e] DC:DB = AC : EB; nun ist AC : EB gegeben, mithin auch DC : DB, wie auch[f] DB : BC; nun ist AD gegeben, folglich hat DB, der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AD, eine gegebene Verhältnis zu BC.

d 6. dat.
e 19. 5.
f cor. 6. dat.

Satz XVIII. 14.

Wenn zu jeder von zwo Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine gegebene Größe hinzugefügt wird; so werden entweder die Summen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen Summe über eine gegebene Größe, wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 18.

Die zwo Größen AB, CD haben zu einander eine gegebene Verhältnis, und zu AB werde die gegebene Größe BE, zu CD die gegebene DF hinzugefügt; so werden entweder die Summen AE, CF eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen über eine gegebene Grösse, wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben.

Weil BE, DF, jede für sich, gegeben sind,
a 1. dat. so ist[a] ihre Verhältnis gegeben; wenn nun
b 12. 5. $BE : DF = AB : CD$, so ist *summando*[b] $AE : CF = BE : DF$, mithin ist $AE : CF$ gegeben.

Ist aber $BE : DF$ mit $AB : CD$ nicht einerley; so ist entweder $BE : DF > AB : CD$, oder $DF : BE > CD : AB$. Es sey erstlich $BE : DF > AB : CD$, und man mache $AB : CD = BG : DF$; so ist, weil nach der Hypothese $AB : CD$ gegeben ist, auch $BG : DF$
c 2. dat. gegeben; nun ist DF gegeben, folglich[c] ist BG gegeben; und weil $BE : DF > (AB : CD =)$
d 10. 5. $BG : DF$, so ist[d] $BE > BG$; ferner weil $AB : CD = BG : DF$, so ist[b] $AG : CF = AB : CD$; nun ist $AB : CD$ gegeben, mithin ist $AG : CF$ gegeben; und weil BE, BG, jede für sich, gegeben sind, so ist GE gegeben; mithin hat AG, der Ueberschuß von AE über eine gegebene Grösse GE, eine gegebene Verhältnis zu CF. Der andere Fall läßt sich auf eben diese Art beweisen.

15. ## Satz XIX.

Wenn von jeder zwoer Grössen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine

eine gegebene Größe weggenommen wird; so werden entweder die Reste eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß eines derselben über eine gegebene Größe, wird zu dem andern eine gegebene Verhältnis haben, Fig. 19.

Die Größen A B, C D haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und von AB werde die gegebene Größe AE, von CD die gegebene CF weggenommen; so werden entweder die Reste EB, FD eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß des einen derselben über eine gegebene Größe, wird eine gegebene Verhältnis zu dem andern haben.

Weil A E, C F, jede für sich, gegeben sind, so ist [a] ihre Verhältnis gegeben; und wenn diese Verhältnis mit AB : CD einerley ist, so ist [b] EB : FD = AB : CD; weil nun AB : CD gegeben ist, so ist die Verhältnis der Reste EB : FD gegeben.

a 1. dat.
b 19. 5.

Ist aber die Verhältnis A B : C D mit A E : C F nicht einerley, so ist entweder A B : CD > AE : CF, oder CD : AB > CF : AE. Es sey erstlich AB : CD > AE : CF, und man mache AB : CD = AG : CF, so ist AG : CF gegeben; nun ist CF gegeben, mithin [c] ist AG gegeben; ferner weil AB : CD, das ist, AG : CF > AE : CF, so ist [d] AG > AE; nun sind AG, AE gegeben, folglich ist der

c 2. dat.
d 10. 5.

Rest E G gegeben; weil nun A B : C D = A G : C F, so ist G B : F D = A B : CD, mithin ist G B : F D gegeben; folglich hat G B, der Ueberschuß von E B über die gegebene Größe E G, eine gegebene Verhältnis zu E D. Auf gleiche Art läßt sich der andere Fall beweisen.

16

Satz XX.

Wenn zu einer von zwo Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine gegebene Größe hinzugefügt, und von der andern eine gegebene Größe hinweggenommen wird; so wird der Ueberschuß der Summe über eine gegebene Größe zu dem Rest eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 20.

Die zwo Größen AB, C D haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und zu AB werde die gegebene Größe E A hinzugefügt, von CD werde die gegebene C F weggenommen; so wird der Ueberschuß der Summe E B über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu dem Rest F D haben.

Weil A B : C D gegeben ist, so sey AB : CD = AG : CF; folglich ist AG : CF gegeben; nun ist C F gegeben, mithin [a] ist AG gegeben; ferner ist E A gegeben, folglich ist E A + A G = E G gegeben. Weil nun

A B

a 2. dat.

AB : CD = AG : CF, so ist[b] GB : FD = AB : CD; mithin weil AB : CD gegeben ist, so ist GB : FD gegeben. Nun ist EG gegeben, folglich hat GB, der Ueberschuß der Summe EB über die gegebene Größe EG, eine gegebene Verhältnis zu dem Rest FD. b 19. 5.

Satz XXI. C.

Wenn zwo Größen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und eine gegebene Größe zu der einen hinzugefügt, die andere aber von einer gegebenen Größe hinweggenommen wird; so ist die Summe samt der Größe, zu welcher der Rest eine gegebene Verhältnis hat, gegeben: und der Rest samt der Größe, zu welcher die Summe eine gegebene Verhältnis hat, ist gegeben. Fig. 21.

Die zwo Größen AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander; und zu AB werde die gegebene Größe BE hinzugefügt, CD aber werde von der gegebenen FD weggenommen: so ist die Summe AE samt der Größe, zu welcher der Rest FC eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Weil AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = GB : FD, mithin ist GB : FD gegeben; nun ist FD gegeben, mithin[a] auch GB a 2. dat.

GB; und weil BE gegeben ist, so ist das Ganze GE gegeben; und weil AB : CD = GB : FD, so ist[b] GA : FC = AB : CD, mithin ist GA : FC gegeben; nun ist, weil GE gegeben ist, AE + GA gegeben; folglich ist die Summe AE + GA, zu welcher leztern Grösse der Rest FC eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

b 19. 5.

Der zweyte Theil erhellet aus dem 15ten Satz.

D.

Satz XXII.

Wenn zwo Grössen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und von der einen eine gegebene Grösse weggenommen, die andere aber von einer gegebenen Grösse weggenommen wird; so ist jeder der Reste samt der Grösse, zu welcher der andere Rest eine gegebene Verhältnis hat, gegeben. Fig. 22.

Die zwo Grössen AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und von AB werde die gegebene Grösse AE weggenommen, CD aber werde von der gegebenen CF weggenommen: so ist der Rest EB samt der Grösse, zu welcher der andere Rest DF eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Weil AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = AG : CF, so ist AG : CF gegeben

gegeben, und weil CF gegeben ist, so ist[a] AG gegeben; nun ist AE gegeben, mithin auch der Rest EG; und weil AB : CD = AG : CF, so ist[b] BG : DF = AB : CD, folglich ist BG : DF gegeben; und weil EG gegeben ist, so ist EB samt BG, zu welcher der andere Rest DF eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

a 2. dat.

b 19. 5.

Der andere Theil erhellet aus diesem und dem 15ten Satz.

Satz XXIII. 20.

Wenn von zwo gegebenen Grössen, solche Grössen genommen werden, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so werden entweder die Reste eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß des einen derselben über eine gegebene Grösse, wird zu dem andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 23.

AB, CD seyen zwo gegebene Grössen, und die Grössen AE, CF, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, werden von ihnen weggenommen; so haben entweder die Reste EB, FD eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß des einen über eine gegebene Grösse hat eine gegebene Verhältnis zu dem andern.

Weil

Weil AB, CD, jede für sich, gegeben sind,
so ist AB : CD gegeben; und wenn AB : CD
a 19. 5. = AE : CF, so ist[a] EB : FD = AB : CD,
folglich ist die Verhältnis der Reste gegeben.

Ist aber AB : CD mit AE : CF nicht
einerley, so ist entweder AB : CD > AE : CF,
oder CD : AB > CF : AE; es sey das erste,
und man mache AE : CF = AG : CD, so
ist AG : CD gegeben, weil AE : CF gegeben
b 2. dat. ist; nun ist CD gegeben, mithin[b] auch AG; und
weil AB : CD > (AE : CF =) AG : CD,
c 10. 5. so ist[c] AB > AG; nun sind AB, AG gege-
ben, mithin ist der Rest BG gegeben; und weil
d 19. 5. AE : CF = AG : CD, so ist[d] EG : FD =
AE : CF, mithin ist EG : FD gegeben; nun
ist GB gegeben, folglich hat EG, der Ueber-
schuß von EB über eine gegebene Größe GB,
eine gegebene Verhältnis zu FD.

Der andere Fall läßt sich auf eben die Art zeigen.

Satz XXIV.

Wenn von drey Größen die erste eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten hat; so wird der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, zu der dritten auch eine gegebene Verhältnis haben.

Fig. 24. AB,

AB, CD, E, seyen die drey Größen, wovon AB eine gegebene Verhältnis zu CD habe, und der Ueberschuß von CD über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu E; so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu E haben.

CF sey die gegebene Größe, und der Ueberschuß von CD über sie, nämlich FD, habe eine gegebene Verhältnis zu E; weil nun AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = AG : CF; mithin ist AG : CF gegeben; nun ist CF gegeben, folglich[a] ist AG gegeben; und weil AB : CD = AG : CF, so ist[b] GB : FD = AB : CD, mithin ist GB : FD gegeben; nun ist FD : E gegeben, folglich[c] ist GB : E gegeben, und weil AG gegeben ist, so hat GB, der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AG, eine gegebene Verhältnis zu E.

a 2. dat.
b 19. 5.
c 9. dat.

Zusatz. 1. Und wenn die erste eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten hat; so wird der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten haben. Denn wenn die zweyte genannt wird die dritte, und die erste die zweyte; so wird dieser Zusatz mit dem Satze einerley seyn.

Zusatz. 2. Gleicherweise wenn die erste eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der dritten über eine gegebene Größe auch eine gegebene Verhältnis zu der zweyten hat; so wird eben dieser Ueberschuß eine gegebene Verhältnis zu der ersten haben: wie aus 9. dat. erhellt.

17.

Satz XXV.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der dritten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu eben der zweyten hat; so wird entweder die erste eine gegebene Verhältnis zu der dritten, oder der Ueberschuß einer derselben über eine gegebene Größe, wird eine gegebene Verhältnis zu der andern haben. Fig. 25.

AB, C, DE seyen drey Größen, und der Ueberschuß einer jeden der zwo AB, DE über eine gegebene Größe, habe zu C eine gegebene Verhältnis; so haben entweder AB, DE eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß einer derselben über eine gegebene Größe wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben.

FB

FB der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AF, habe zu C eine gegebene Verhältnis, und GE der Ueberschuß von DE über eine gegebene Größe DG, habe zu C eine gegebene Verhältnis; weil nun FB, GE, jede für sich eine gegebene Verhältnis zu C haben, so haben sie [a] eine gegebene Verhältnis zu einander. Nun sind zu FB, GE die gegebenen Größen AF, DG hinzugefügt, folglich [b] haben entweder die Ganzen AB, DE eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, hat zu der andern eine gegebene Verhältnis.

a 9. dat.

b 18. dat.

Satz XXVI. 18.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß die Ueberschüsse der einen über gegebene Größen, gegebene Verhältnisse zu den zwo andern Größen haben; so werden entweder diese zwo eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 26.

AB, CD, EF seyen drey Größen, und GD, der Ueberschuß der einen CD über die gegebene Größe CG, habe zu AB eine gegebene Verhältnis; und gleicherweise habe KD, der Ueberschuß ebenderselben CD über eine gegebene Größe CK, eine gegebene Verhältnis zu EF; so hat entweder AB eine gegebene Verhältnis zu EF, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältnis zu der andern.

Weil GD eine gegebene Verhältnis zu AB hat, so mache man GD : AB = CG : HA, mithin ist CG : HA gegeben; nun ist CG ge-
a 2. dat. geben, mithin[a] auch HA; und weil GD : AB
b 12. 15. = CG : HA, so ist[b] CD : HB = GD : AB, mithin ist CD : HB gegeben. Gleicherweise, weil KD eine gegebene Verhältnis zu EF hat, so mache man KD : EF = CK : LE; mithin ist CK : LE gegeben; nun ist CK gegeben,
a 2. dat. mithin[a] auch LE; und weil KD : EF =
b 12. 5. CK : LE, so ist[b] CD : LF = KD : EF, mithin ist CD : LF gegeben; nun aber ist
c 9. dat. CD : HB gegeben, folglich[c] ist HB : LF gegeben: und wenn von HB, LF die gegebenen Größen HA, LE weggenommen werden, so haben entweder die Reste AB, EF eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß des einen davon über eine gegebene Größe, hat eine
d 19. dat. gegebene Verhältnis zu dem andern[d].

Anderer Beweis.

AB, C, DE seyen drey Größen, und die Ueberschüsse der einen davon, C über gegebene Größen,

Größen, haben gegebene Verhältnisse zu A B und D E; so haben entweder A B, D E eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe hat eine gegebene Verhältnis zu der andern.

Weil der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu A B hat, so hat[a] A B samt einer gegebenen Größe eine gegebene Verhältnis zu C; diese gegebene Größe sey A F, mithin ist F B : C gegeben; gleicherweise weil der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D E hat, so hat[a] D E samt einer gegebenen Größe, eine gegebene Verhältnis zu C; diese gegebene Größe sey D G, mithin ist G E : C gegeben; nun ist F B : C gegeben, folglich[b] ist F B : G E gegeben; und wenn von F B, G E die gegebenen Größen A F, D G weggenommen werden, so haben entweder die Reste A B, D E eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß des einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältnis zu der andern[c].

a 14. dat.

b 9. def.

c 19. dat.

Satz XXVII. 19.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis

hältnis

Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene Größe, auch eine gegebene Verhältnis zu der dritten hat: so wird der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten haben. Fig 27.

A B, C D, E seyen drey Größen, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten A B über die gegebene Größe A G, das ist G B, eine gegebene Verhältnis zu C D; und F D der Ueberschuß von C D über die gegebene Größe C F, eine gegebene Verhältnis zu E hat: so wird der Ueberschuß von A B über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu E haben.

Weil GB : CD gegeben ist, so mache man GB:CD = GH:CF, mithin ist GH : CF
a 2. dat. gegeben; nun ist CF gegeben, mithin[a] auch GH; und weil A G gegeben ist, so ist A H gegeben: weil nun G B : C D = G H : C F, so
b 19. 5. ist[b] G B : C D = H B : F D, folglich ist HB : FD gegeben; nun ist F D : E gegeben;
c 9. dat. mithin[c] auch H B : E; und weil A H gegeben ist, so hat HB, der Ueberschuß von A B über die gegebene Größe A H, eine gegebene Verhältnis zu E.

Anderer Beweis.

AB, C, D seyen drey Größen, und der Ueberschuß EB von der ersten AB über die gegebene

gebene Größe AE, habe eine gegebene Verhältnis zu C, und der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu D: so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D haben.

Weil EB : C gegeben ist, und der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D hat, so hat [d] der Ueberschuß von EB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D; diese gegebene Größe sey EF; mithin hat FB, der Ueberschuß von EB über EF, eine gegebene Verhältnis zu D; nun ist AF gegeben, weil AE, EF gegeben sind; folglich hat FB, der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe AF, eine gegebene Verhältnis zu D.

d 24. dat.

Satz XXVIII. 25.

Wenn zwo, der Lage nach gegebene, Linien einander schneiden, so sind der Punct oder die Puncte, worin sie sich schneiden, gegeben. Fig. 28.

Zwo der Lage nach gegebene Linien AB, CD schneiden sich in dem Punct E; so ist der Punct E gegeben.

Weil die Linien AB, CD der Lage nach gegeben sind, so haben sie immer einerley La-
a 4. def. ge[a], mithin haben der Punct, oder die Puncte, worinn sie einander schneiden, immer einerley Lage: und weil die Linien AB, CD sich finden lassen[a] so lassen sich der Punct oder die Puncte, worinn sie sich schneiden, gleicherweise finden, und sind daher der Lage nach gegeben[a].

26.

Satz XXIX.

Wenn die Endpuncte einer geraden Linie der Lage nach gegeben sind, so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben.

Weil die Endpuncte der geraden Linie ge-
a 4. def. geben sind, so lassen sie sich finden[a]: es seyen die Puncte A, B, zwischen denen sich eine
b 1. Postulatum. gerade Linie AB ziehen läßt[b]; diese hat eine unveränderliche Lage, weil zwischen zween gegebenen Puncten sich nur Eine gerade Linie ziehen läßt: und wenn die gerade Linie AB gezogen ist, so ist ihre Größe zugleich dargelegt oder gegeben: folglich ist die gerade Linie AB der Lage und Größe nach gegeben.

27.

Satz XXX.

Wenn einer von den Endpuncten einer der Lage und Größe nach gegebenen geraden Linie

Linie gegeben ist, so wird der andere Endpunct auch gegeben seyn. Fig. 29.

Der Punct A sey gegeben, nämlich einer von den Endpuncten einer der Größe nach gegebenen geraden Linie, und welcher in der geraden Linie A C, die der Lage nach gegeben ist, liege; so wird der andere Endpunct auch gegeben seyn.

Weil die gerade Linie der Größe nach gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche finden; a 1. def.
es sey die gerade Linie D; von der größern geraden Linie A C schneide man AB = D ab; mithin ist der andere Endpunct B von der geraden Linie AB gefunden; und der Punct B hat immer einerley Lage, weil jeder andere Punct in A C auf ebenderselben Seite von A, zwischen ihm und dem Punct A eine größere oder kleinere gerade Linie als AB, das ist, als D, abschneidet; mithin ist der Punct B gegeben[b]: und b 4. def.
es ist klar, daß ein anderer solcher Punct in der, auf der entgegengesezten Seite von A verlängerten AC sich finden läßt.

Satz XXXI. 28.

Wenn eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel gezogen wird; so ist sie der Lage nach gegeben. Fig. 30.

A sey ein gegebener Punct, und BC eine der Lage nach gegebene gerade Linie; so wird die gerade Linie, durch A mit BC parallel gezogen, der Lage nach gegeben seyn.

a 31. 1. Durch A ziehe man [a] die gerade Linie DAE parallel mit BC; so hat DAE immer einerley Lage, weil keine andere gerade Linie durch A mit BC parallel gezogen werden kann; folglich ist die gerade Linie DAE, die gefunden worden ist,

b 4. def. der Lage nach gegeben [b].

29.

Satz XXXII.

Wenn an einem gegebenen Punct in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, eine gerade Linie gezogen wird, die einen gegebenen Winkel mit ihr macht; so ist diese gerade Linie der Lage nach gegeben. Fig. 31.

Es sey AB eine der Lage nach gegebene gerade Linie, und C ein gegebener Punct in ihr; so ist die an C gezogene gerade Linie, die einen gegebenen Winkel mit CB macht, der Lage nach gegeben.

a 1. def. Weil der Winkel gegeben ist, so läßt [a] sich einer finden, der ihm gleich ist; es sey der Winkel D; an dem Punct C in der gegebenen

b 23. 1. geraden Linie AB mache man [b] den Winkel ECB gleich dem Winkel D; mithin hat die Linie EC

immer

immer einerley Lage, weil jede andere an den Punct C gezogene gerade Linie F C, einen grössern oder kleinern Winkel mit C B macht, als E C B, oder D; folglich ist die gerade Linie E C, die gefundnn worden, der Lage nach gegeben.

Es ist zu bemerken, daß es auf einer Seite von A B zwo gerade Linien E C, G C giebt, die gleiche Winkel mit ihr machen, und die, auf die andere Seite verlängert, auch gleiche Winkel mit ihr machen.

Satz XXXIII. 30.

Wenn eine gerade Linie von einem gegebenen Pnnct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie gezogen wird, und mit ihr einen gegebenen Winkel macht; so ist sie der Lage nach gegeben. Fig. 32.

Von dem gegebenen Punct A werde die gerade Linie A D an die der Lage nach gegebene gerade Linie B C gezogen, und mache mit ihr einen gegebenen Winkel A D C; so ist A D der Lage nach gegeben.

Durch den Punct A ziehe man[a] die gerade Linie E A F parallel mit B C; weil nun B C der Lage nach gegeben ist, so ist[b] E A F der Lage nach gegeben: und weil die Linie A D die Parallel-Linien B C, E F berührt, so ist[c] E A D

a 31. I.
b 31. dat.
c 29. I.

= ADC; nun ist ADC gegeben, mithin ist auch EAD gegeben, folglich weil die Linie DA an einen gegebenen Punct A in der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie EF gezogen ist, und einen gegebenen Winkel EAD mit ihr macht,
d 32. dat. so ist [d] AD der Lage nach gegeben.

31.

Satz XXXIV.

Wenn von einem gegebenen Punct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie, eine andere gezogen wird, die der Größe nach gegeben ist; so wird sie auch der Lage nach gegeben seyn. Fig. 33.

A sey ein gegebener Punct, und BC eine der Lage nach gegebene gerade Linie, so ist eine von dem Punct A an BC gezogene, der Größe nach gegebene Linie, auch der Lage nach gegeben.

Weil die gerade Linie der Größe nach gegeben ist, so läßt [a] sich eine finden, die ihr
a 1. def. gleich ist; es sey die gerade D; von dem Punct A ziehe man AE senkrecht auf BC, und weil AE die kürzeste von allen geraden Linien ist, die von dem Punct A an BC können gezogen werden, so kann die gerade D, nicht kleiner seyn als AE, weil von A an BC eine ihr gleiche gezogen werden soll. Wenn daher D = AE ist, so ist AE die

die von A an BC gezogene, der Größe nach gegebene, gerade Linie; und es ist evident[b], daß AE der Lage nach gegeben ist, weil sie von dem gegebenen Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, und mit BC den gegebenen Winkel AEC macht. b 33. dat.

Ist aber die gerade Linie D nicht gleich AE, so muß sie größer seyn als AE: man verlängere AE, und mache AF = D; und von dem Mittelpunct A mit dem Halbmesser AF beschreibe man den Kreisbogen GFH, und ziehe AG, AH; weil nun der Kreisbogen GFH,[c] und die gerade Linie BC, der Lage nach gegeben sind, so ist[d] ihr Durchschnitt G gegeben; nun ist der Punct A gegeben, folglich ist AG der Lage nach gegeben[e], das ist, die gerade Linie AG, die, wegen ihrer Gleichheit mit D, der Größe nach gegeben, und von dem Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, ist auch der Lage nach gegeben; und gleicherweise ist AH der Lage nach gegeben; folglich giebt es in diesem Fall zwo gerade Linien von einerley gegebenen Größe, die von einem gegebenen Punct A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie B können gezogen werden.

c 6. def.
d 28. dat.
e 29. dat.

Satz XXXV. 32.

Wenn eine gerade Linie zwischen zwo geraden der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien

Linien gezogen wird, und mit ihnen gegebene Winkel macht; so ist sie der Größe nach gegeben. Fig. 34.

Die gerade Linie EF sey zwischen den, der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien AB, CD gezogen, und mache mit ihnen die gegebenen Winkel BEF, EFD; so ist EF der Größe nach gegeben.

In CD nehme man den Punct G, und
a 31. I. durch G ziehe man[a] GH parallel mit EF; weil nun CD die Parallel-Linien GH, EF berührt,
b 29. I. so ist[b] EFD = HGD; nun ist EFD gegeben, mithin ist auch HGD gegeben; und weil HG an den gegebenen Punct G in der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie CD gezogen ist, und mit ihr den gegebenen Winkel HGD
c 32. dat. macht, so ist[c] die gerade Linie HG der Lage nach gegeben; nun ist AB der Lage nach gege-
d 28. dat. ben, mithin ist der Punct H gegeben[d]; und weil der Punct G auch gegeben ist, so ist GH
e 29. dat. der Größe nach gegeben[e]; folglich weil EF = GH, so ist EF der Größe nach gegeben.

33.
Satz XXXVI.

Wenn eine, der Größe nach gegebene, gerade Linie zwischen zwo geraden, der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien gezogen wird,

wird, so wird sie mit den Parallel-Linien gegebene Winkel machen. Fig. 35.

Die der Größe nach gegebene gerade Linie EF sey zwischen den Parallel-Linien AB, CD, die der Lage nach gegeben sind, gezogen, so werden die Winkel AEF, EFC gegeben seyn.

Weil EF der Größe nach gegeben ist, so läßt[a] sich eine ihr gleiche gerade Linie finden; sie sey G. In AB nehme man einen gegebenen Punct H, und von ihm ziehe man[b] HK senkrecht auf CD; demnach kann die gerade Linie G, das ist, EF nicht kleiner seyn als HK; und wenn G = HK, so ist auch EF = HK; mithin macht EF rechte Winkel mit CD, sonst würde EF größer seyn als HK, welches ungereimt ist; demnach ist EFD ein rechter, folglich gegebener, Winkel.

a 1. def.

b 12. 1.

Ist aber die gerade Linie G nicht gleich HK, so muß sie größer als HK seyn. Man verlängere HK, und nehme HL = G, und aus dem Mittelpunct H mit dem Halbmesser HL beschreibe man den Kreisbogen MLN, und vereinige HM, HN; weil nun der Kreis[c] MLN, und die gerade Linie CD der Lage nach gegeben sind, so sind die Puncte M, N gegeben[d]; und weil der Punct H gegeben ist, so sind[e] die Linien HM, HN der Lage nach gegeben; nun ist CD der Lage nach gegeben; mithin sind die

c 6. def.

d 28. dat.

e 29. dat.

Winkel

f 5 def. Winkel HMN, HNM der Lage nach gegeben[f]. Von den geraden Linien HM, HN sey HN diejenige, die mit EF nicht parallel ist, denn EF kann nicht mit beyden parallel seyn, und man
g 34. I. ziehe EO parallel mit HN; so ist[g] EO = HN, das ist, = G; und weil EF = G, so ist EO = EF, und EFO = EOF,
h 29. I. das ist[h], = dem gegebenen Winkel HNM, und weil HNM (= EFO oder EFD) ist
k I. def. gefunden worden, so ist[k] EFD, das ist, AEF der Größe nach gegeben, folglich auch der Winkel EFC.

E.

Satz XXXVII.

Wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie von einem Punct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie unter einem gegebenen Winkel gezogen wird; so wird die gerade Linie, die durch diesen Punct mit der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben seyn. Fig. 36.

Die der Größe nach gegebene Linie AD sey von dem Punct A an die der Lage nach gegebene BC, unter dem gegebenen Winkel ADC, gezogen; so wird die Linie EAF, die durch A mit BC parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben seyn.

In

In BC nehme man einen gegebenen Punct G, und ziehe GH parallel mit AD; weil nun HG an einen gegebenen Punct G in einer der Lage nach gegebenen Linie BC, unter einem gegebenen Winkel HGC (denn [a] HGC ist gleich dem gegebenen Winkel ADC) gezogen ist; so ist [b] HG der Lage nach gegeben; nun ist HG auch der Größe nach gegeben, weil sie [c] der, der Größe nach, gegebenen AD gleich ist; mithin weil G, einer von den Endpuncten der, der Lage und Größe nach, gegebenen Linie GH gegeben ist, so ist [d] der andere Endpunct H gegeben, folglich ist die gerade Linie EAF, die durch den gegebenen Punct H mit der, der Lage nach, gegebenen BC parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben [e].

a 29. I.
b 32. dat.
c 34. I.
d 30. dat.
e 31. dat.

Satz XXXVIII. 34.

Wenn eine gerade Linie von einem gegebenen Punct an zwo, der Lage nach gegebene, gerade Parallel-Linien gezogen wird; so ist die Verhältnis der, zwischen dem gegebenen Punct und den Parallel-Linien liegenden Segmente gegeben. Fig. 37.

Die gerade Linie EFG sey von dem gegebenen Punct E an die Parallel-Linien AB, CD gezogen; so ist EF : EG gegeben.

Von dem Punct E ziehe man EHK senkrecht auf CD; weil nun von einem gegebenen Punct E die gerade EK an die der Lage nach gegebene CD, unter einem gegebenen Winkel
a 33. dat. EKC, gezogen ist; so ist[a] EK der Lage nach gegeben; nun sind AB, CD der Lage nach ge-
b 28. dat. geben, mithin[b] sind die Puncte H, K gegeben;
c 29. dat. und weil der Punct E gegeben ist, so sind[c]
d 1. dat. EH, EK der Größe nach gegeben, folglich[d] ist ihre Verhältnis gegeben. Nun ist, weil AB, CD mit einander parallel sind, EH : EK = EF : EG; folglich ist EF : EG gegeben.

35. 36.

Satz XXXIX.

Wenn die Verhältnis der Segmente einer geraden Linie, die zwischen einem in ihr gegebenen Punct und zwo Parallel-Linien liegen, gegeben ist; so ist, wenn eine von den Parallel-Linien der Lage nach gegeben ist, auch die andere der Lage nach gegeben. Fig. 38.

Von dem Punct A sey die gerade Linie AED an die zwo Parallel-Linien FG, BC gezogen, und die Verhältnis der Segmente AE, AD sey gegeben; so wird, wenn eine von den Parallel-Linien BC der Lage nach gegeben ist, auch die andere FG der Lage nach gegeben seyn.

Von

Von dem Punct A ziehe man AH senkrecht auf BC, und AH schneide FG in K; weil nun AH von dem gegebenen Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, und mit ihr einen gegebenen Winkel AHD macht, so ist[a] AH der Lage nach gegeben; und weil BC auch der Lage nach gegeben ist, so ist[b] der Punct H gegeben; nun ist auch der Punct A gegeben, mithin[c] ist AH der Größe nach gegeben; und weil FG, BC parallel sind, so ist AE : AD = AK : AH; nun ist AE : AD gegeben; folglich auch AK : AH; und weil AH der Größe nach gegeben ist, so ist[d] AK der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct A ist gegeben, mithin[e] ist der Punct K gegeben. Und weil die gerade Linie FG durch den gegebenen Punct K mit der, der Lage nach gegebenen, BC parallel gezogen ist, so ist[f] FG der Lage nach gegeben.

a 33. dat.
b 28. dat.
c 29. dat.
d 2. dat.
e 30. dat.
f 31. dat.

Satz XL. 37. 38.

Wenn die Verhältnis der Segmente einer geraden Linie, in die sie durch drey gerade Parallel-Linien geschnitten worden, gegeben ist; so wird, wenn zwo von den Parallel-Linien der Lage nach gegeben sind, auch die dritte der Lage nach gegeben seyn. Fig. 39.

AB, CD, HK seyen drey gerade Parallel-Linien, wovon AB, CD der Lage nach gegeben seyn, und die Verhältnis der Segmente GE, GF, in die die gerade Linie GEF durch die drey Parallel-Linien geschnitten worden, sey gegeben; so wird die dritte Parallel-Linie HK der Lage nach gegeben seyn.

In AB nehme man einen gegebenen Punct L, und ziehe LM senkrecht auf CD, so daß sie der HK in N begegne; weil nun LM von dem gegebenen Punct L an die der Lage nach gegebene CD gezogen ist, und einen gegebenen Winkel LMD mit ihr macht, so ist[a] LM der Lage nach gegeben; nun ist CD der Lage nach gegeben, mithin[b] ist der Punct M gegeben; und weil der Punct L gegeben ist, so ist[c] LM der Größe nach gegeben; und weil GE : GF gegeben ist, und GE : GF = NL : NM, so ist NL : NM gegeben; folglich ist[d] ML : LN gegeben; nun ist LM der Größe nach gegeben; mithin[e] ist LN der Größe nach gegeben; und weil sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct L gegeben ist, so[f] ist der Punct N gegeben; folglich weil die gerade Linie HK durch den gegebenen Punct N mit der, der Lage nach, gegebenen CD parallel gezogen ist, so ist sie[g] der Lage nach gegeben.

a 33. dat.
b 28. dat.
c 29. dat.
d cor. 6. oder 7. dat.
e 2. dat.
f 30. dat.
g 31. dat.

Satz

Satz XLI. F.

Wenn eine gerade Linie drey der Lage nach gegebene gerade Parallel-Linien schneidet; so haben die Segmente derselben, die zwischen den Parallel-Linien liegen, eine gegebene Verhältnis. Fig. 40.

Die geraden Parallel-Linien AB, CD, EF, die der Lage nach gegeben sind, seyen durch die gerade Linie GHK geschnitten; so wird die Verhältnis GH : HK gegeben seyn.

In AB nehme man einen gegebenen Punct L, und ziehe LM senkrecht auf CD, so daß sie EF in N begegne; demnach [a] ist LM der Lage nach gegeben; nun sind CD, EF der Lage nach gegeben, mithin sind die Puncte M, N gegeben; und weil der Punct L gegeben ist, so sind [b] die geraden Linien LM, MN der Größe nach gegeben, folglich ist [c] LM : MN gegeben, nun ist LM:MN = GH:HK, folglich ist GH:HK gegeben. (*)

a 33. dat.

b 29. dat.

c 1. dat.

(*) Daß LM : MN = GH : HK läßt sich beweisen, wenn man von G zu N eine Linie zieht, aus 4. 6. und 19. 5. Ueb.

39. ## Satz XLII.

Wenn jede von den Seiten eines Dreyeks der Größe nach gegeben ist; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben, (*triangulum specie datum.*) Fig. 41.

Es sey jede von den Seiten des △ ABC der Größe nach gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 22. 1. Man mache[a] ein △ DEF, dessen Seiten, jede, den gegebenen geraden Linien AB, BC, CA gleich seyen; welches sich thun läßt, weil zwo zusammengenommen größer seyn müßen, als die dritte; nun sey DE = AB, EF = BC, FD = CA; weil also die zwo Seiten ED, DF jede für sich gleich sind den zwo Seiten BA, AC, und die Grundlinie EF
b 8. 1. gleich der Grundlinie BC, so ist[b] der Winkel EDF gleich dem Winkel BAC; folglich weil
c 1. def. EDF = BAC ist gefunden worden, so ist[c] BAC gegeben; gleicherweise sind die Winkel B, C gegeben. Und weil die Seiten AB, BC,
d 1. dat. CA gegeben sind, so sind[d] ihre Verhältnisse zu
e 3. def. einander gegeben, folglich[e] ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Satz LXIII. 40.

Wenn jeder von den Winkeln eines Dreyeks der Größe nach gegeben ist, so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 42.

Jeder von den Winkeln des △ ABC sey der Größe nach gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man ziehe eine, der Lage und Größe nach, gegebene gerade Linie DF, und an den Endpuncten D, E mache man [a] den Winkel EDF a 23. 1.
= BAC, und den Winkel DEF = ABC; so wird auch der Winkel EFD = BCA seyn; weil nun jeder der Winkel an den Puncten A, B, C, gegeben ist, so ist auch jeder an den Puncten D, E, F gegeben; und weil die gerade Linie FD an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach gegebenen DE, gezogen ist, und den gegebenen Winkel EDF macht, so ist [b] DF der b 23. dat.
Lage nach gegeben. Gleicherweise ist EF der Lage nach gegeben; mithin ist der Punct F gegeben; und weil die Puncte D, E gegeben sind, so ist [c] jede der Linien DE, EF, FD der Größe c 29. dat.
nach gegeben; folglich [d] ist das △ DEF der d 42. dat.
Gattung nach gegeben; und weil es dem △ ABC ähnlich ist [e], so ist △ ABC der Gattung nach e {4. 6. 1. def. 6.}
gegeben.

41. ## Satz XLIV.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeks gegeben ist, und die anliegenden Seiten eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 43.

Das △ A B C habe einen seiner Winkel B A C gegeben, und die anliegenden Seiten B A, A C haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so wird das △ A B C der Gattung nach gegeben seyn.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie D E, und an dem Punct D mache man E D F gleich dem gegebenen Winkel B A C; demnach ist E D F gegeben; und weil die gerade F D an einen gegebenen Punct D in der, der Lage nach, gegebenen E D gezogen ist,
a 32. dat. und den gegebenen Winkel E D F macht, so ist [a] F D der Lage nach gegeben. Ferner weil B A : A C gegeben ist, so mache man B A : A C = E D : D F, und ziehe E F; weil nun E D : D F
b 2. dat. gegeben ist, und E D gegeben ist, so ist [b] D F der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct D ist gege-
c 30. dat. ben, folglich [c] ist der Punct F gegeben; nun sind
d 29. dat. die Puncte D, E gegeben, mithin sind [d] D E,
e 42. dat. E F, F D der Größe nach gegeben; folglich [e] ist

das

das △ DEF der Gattung nach gegeben; und weil in den △△ ABC, DEF, der Winkel BAC = EDF und BA:AC = ED:DF, so[f] sind die Dreyecke einander ähnlich; nun ist das △ DEF der Gattung nach gegeben, folglich auch das △ ABC. f 6. 6

Satz XLV. 42.

Wenn die Seiten eines Dreyeks gegebene Verhältnisse zu einander haben, so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 44.

Die Seiten des △ ABC haben gegebene Verhältnisse zu einander; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie D; weil nun AB : BC gegeben ist, so mache man AB : BC = D : E; mithin ist[a] wegen der gegebenen D auch E gegeben. a 2. dat.
Weil ferner BC : CA gegeben ist, so mache man BC : CA = E : F, wo, weil E gegeben ist, auch[a] F gegeben ist. Weil nun AB : BC = D : E so ist *componendo* AB + BC : BC = D + E : E; nun ist BC : CA = E : F, folglich *ex æquo*[b] AB + BC : CA = b 22. 5.
D + E : F; mithin, weil[c] AB + BC > CA, c 20. 1.
so ist[d] D + E > F; und so sind je zwey und d def. 5. 5.
zwey von den drey Linien D, E, F, zusammen-

 genommen

genommen größer als die dritte. Nun mache
e 22. 1. man[e] ein △ GHK, dessen Seiten den Linien D, E, F gleich seyn, so daß GH = D, HK = E, GK = F; und weil jede der Linien D, E, F gegeben ist, so ist auch jede der Seiten GH, HK, GK der Größe nach gegeben;
f 42. dat. mithin[f] ist das △ GHK der Gattung nach gegeben; nun ist AB : BC = (D : E =) GH : HK; ferner BC : CA = (E : F =) HK : GK; folglich *ex æquo* AB : AC =
g 5. 6. GH : GK. Mithin ist[g] △ ABC mit dem △ GHK gleichwinklicht und ähnlich; nun ist das △ GHK der Gattung nach gegeben, folglich ist auch △ ABC der Gattung nach gegeben.

Zusatz. Wenn man fodert, daß ein Dreyek soll verfertiget werden, dessen Seiten eben die Verhältnisse unter einander haben, wie drey gegebene gerade Linien; so ist nothwendig, daß je zwey und zwey derselben zusammengenommen größer seyn als die dritte.

43. Satz XLVI.

Wenn die Seiten eines rechtwinklichten Dreyeks, die einen der spitzigen Winkel einschließen, eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 45.

Die

Die Seiten A B, B C, die den spitzigen Winkel ABC des in A rechtwinklichten △ ABC einschließen, haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so ist das △ A B C der Gattung nach gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE; weil nun AB : BC gegeben ist, so mache man A B : B C = DE : EF; so ist DE:EF gegeben; und weil DF gegeben ist, so ist[a] E F gegeben. Ferner a 2. dat.
weil in der Proportion AB:BC = DE:EF, AB $<$ BC[b], so ist[c] DE $<$ EF. Von dem b 19. 1. c def. 5. 5.
Punct D ziehe man D G unter einem rechten Winkel an DE, und aus dem Mittelpunct E beschreibe man mit dem Halbmesser E F einen Kreis, der D G in zween Puncten schneiden wird: einer davon sey G, und man ziehe EG; demnach ist der Umfang des Kreises der Lage nach gegeben[d]; nun ist[e] die gerade DG der d 6. def. e 32. dat.
Lage nach gegeben, weil sie an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach, gegebenen DE, unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; mithin[f] ist der Punct G gegeben; und weil die f 28. dat.
Puncte D, E gegeben sind, so sind[g] DE, EG, g 29. dat.
GD der Größe nach gegeben, und das △ DEG ist der Gattung nach gegeben[h]. Und weil in den h 42. dat.
△ △ ABC, DEG, der Winkel B A C = EDG, und die einschließenden Seiten der Winkel ABC, DEG proportionell sind, und jeder

der

der andern Winkel BCA, EGD kleiner ist als
i 7. 6. ein rechter; so ist[i] △ ABC gleichwinklicht und ähnlich dem △ DEG; nun ist △ DEG der Gattung nach gegeben, folglich ist auch △ ABC der Gattung nach gegeben; und das Dreyek, das entsteht, wenn man von E an den andern Punct, wo der Kreis DG schneidet, eine gerade Linie zieht, ist gleicherweise der Lage nach gegeben.

44.

Satz XLVII.

Wenn der schiefe Winkel eines Dreyeks gegeben ist; und wenn die Seiten, die einen andern Winkel einschließen, eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben Fig. 46.

In dem △ ABC sey einer seiner schiefen Winkel ABC gegeben, und die Seiten BA, AC, die einen andern Winkel BAC einschliessen, haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Es sey erstlich die gegebene Verhältnis eine Gleichheits-Verhältnis, das ist, es sey BA = AC, mithin der Winkel ABC = ACB; weil nun ABC gegeben ist, so ist ACB, mit-
a 23. 1. hin[a] auch der dritte Winkel BAC gegeben; folglich

folglich ist △ ABC[b] der Gattung nach gege- b 43. dat.
ben; und es ist evident, daß in diesem Fall der gegebene schiefe Winkel spitzig seyn muß.

Zweytens sey die gegebene Verhältnis eine Verhältnis des Kleinern zum Größern, das ist, es sey die an dem gegebenen Winkel liegende Seite AB kleiner als die Seite AC. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE, und mache den Winkel DEF = ABC, so ist wegen des gegebenen ABC auch DEF gegeben, mithin[c] ist EF der Lage nach c 32. dat.
gegeben; und weil BA : AC gegeben ist, so mache man BA : AC = ED : DG; so wird, weil ED : DG, und ED gegeben sind, auch[d] d 2. dat.
DG gegeben seyn; nun ist BA $<$ AC, folglich[e] ist auch ED $<$ DC. Aus dem Mittel- e def. 5. 5.
punct D mit dem Halbmesser DG beschreibe man den Kreis GF, der EF in F begegne, und ziehe DF; weil nun[f] der Kreis, wie auch die gera- f 6. def.
de EF, der Lage nach gegeben sind, so ist[g] der g 28. dat.
Punct F gegeben; und weil auch die Puncte D, E gegeben sind, so sind[h] die geraden Linien DE, h 29. dat.
EF, FD der Größe nach gegeben, und[i] △ i 42. dat.
DEF ist der Gattung nach gegeben; und weil BA $<$ AC, so ist[k] der Winkel ACB $<$ k 18. 1.
ABC, folglich[l] ist ACB $<$ als ein rechter l 32. 1.
Winkel. Gleicherweise weil ED $<$ DG oder DF, so ist der Winkel DFE $<$ als ein rechter; und weil in den △△ ABC, DEF, der Winkel ABC = DEF, und die Seiten, die den

Win-

Winkel BAC, EDF einschließen, proportionell sind, und jeder der übrigen Winkel ACB, DEF kleiner ist als ein rechter Winkel; so
m 7. 6. sind[m] die △△ ABC, DEF einander ähnlich; und weil DEF der Gattung nach gegeben ist, so ist auch △ ABC der Gattung nach gegeben.

Drittens sey die gegebene Verhältnis des Größern zum Kleinern, daß ist, die an dem gegebenen Winkel liegende Seite AB sey größer als AC; so nehme man, wie in dem leztern Fall, eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE, und mache den Winkel DEF
c 32. dat. gleich dem gegebenen ABC; mithin ist[c] EF der Lage nach gegeben. Nun ziehe man DG senkrecht auf EF; wenn demnach BA : AC = ED : DG, so sind[m] die △△ ABC, DEG einander ähnlich, weil ABC = DEG, und DGE ein rechter Winkel ist (*). Folglich ist ACB ein rechter Winkel, und △
b 43. dat. ABC ist[b] der Gattung nach gegeben.

Wenn

(*) In dem 7ten Satze des 6ten Buches der *Elementorum* muß nach den Worten: *reliquorum vero simul utrumque aut minorem aut non minorem recto*, hinzugefügt werden: *aut unum ex illis rectum*; wie sich leicht *per impossibile* beweisen läßt. Ueb.

Wenn aber in dem leztern Fall B A : A C
nicht einerley ist mit E D : D G, das ist, mit
der Verhältnis von B A zu der von A auf B C
senkrecht gezogenen A M; so muß B A : A C $<$
B A : A M seyn o, weil A C $>$ A M. Man o 8. 5.
mache B A : A C $=$ E D : D H; mithin ist
E D : D H $<$ (B A : A M $=$) E D : D G,
folglich p ist D H $>$ D G; und weil B A $>$ p 10. 5.
A C, so ist e E D $>$ D H. Aus dem Mittel- e def. 5. 5.
punct D mit dem Halbmesser D H beschreibe
man den Kreis K H F, der der Linie E F noth-
wendig in zween Puncten begegnen wird, weil
D H $>$ D G und $<$ D E. Es geschehe in den
Puncten F, K, die, wie im vorhergehenden Fall
gezeigt worden, gegeben sind; und wenn D F,
D K gezogen werden, so sind die △ △ D E F,
D E K der Gattung nach gegeben, wie ebenfalls
gezeigt worden ist. Aus dem Mittelpunct A mit
dem Halbmesser A C beschreibe man einen Kreis,
der der Linie B C wiederum in L begegne; so
muß, wenn A C B kleiner ist als ein rechter Win-
kel, A L B größer als ein rechter seyn, und um-
gekehrt. Gleicherweise wenn der Winkel D F E
kleiner ist als ein rechter, so muß D K E größer
als ein rechter seyn, und umgekehrt. Nun
sey jeder der Winkel A C B, D F E entweder
kleiner oder größer als ein rechter; demnach weil
in den △ △ A B C, D E F, der Winkel A B C
$=$ D E F, und die Seiten B A, A C und E D,
D F, die die zween andere Winkel einschließen,

pro-m 7. 6. proportionell sind, so ist[m] △ ABC dem △ DEF ähnlich. Gleicherweise ist △ ABL dem △ DEK ähnlich. Weil nun die △ △ DEF, DEK der Gattung nach gegeben sind, so sind auch die △ △ ABC, ABL der Gattung nach gegeben. Hieraus ist evident, daß es in diesem dritten Fall immer zwey Dreyecke von verschiedener Gattung giebt, denen die in dem Satz gegebenen Dinge zukommen können.

45.
Satz XLVIII.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeks gegeben ist, und wenn die beyden Seiten, die diesen Winkel einschließen, zusammengenommen, eine gegebene Verhältnis zu der dritten Seite haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 47.

In dem △ ABC sey der Winkel BAC gegeben, und die Verhältnis BA + AC : BC sey gegeben; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 9. 1. Man theile[a] den Winkel BAC durch die gerade Linie AD in zween gleiche Theile, so ist
b 3. 6. die Hälfte BAD gegeben. Weil nun[b] BA : AC = BD : DC, so ist *permutando* AB : BD
c 12. 5. = AC : DC, und *summando*[c]. AB + AC : BC

BC = AB : BD. Nun ist AB + AC : BC gegeben, folglich ist auch A B : B D gegeben; und weil BAD gegeben ist, so ist [d] △ ABD der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel ABD gegeben; und weil auch der Winkel BAC gegeben ist, so ist [e] △ ABC der Gattung nach gegeben.

d 47. dat.

e 43. dat.

Ein Dreyek, das die in dem Satz gegebene Dinge haben soll, läßt sich folgendermaaßen finden. EFG sey der gegebene Winkel, und H : K sey die gegebene Verhältnis, die die Summe der zwo, den Winkel EFG einschließenden, Seiten zu der dritten Seite des Dreyeks haben soll; weil nun die Summe zwoer Seiten eines Dreyeks größer ist, als die dritte Seite, so muß H : K die Verhältnis des Größern zum Kleinern seyn. Man theile [a] E F G durch eine gerade F L in zween gleiche Theile, und finde nach dem 47sten Satz ein Dreyek, das E F L zu einem seiner Winkel habe, und in dem die Verhältnis der Seiten, die den, der Linie FL entgegen stehenden Winkel einschließen, einerley sey mit H : K; welches sich folgendermaaßen bewerkstelligen läßt: man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene F E, und ziehe E L senkrecht auf FL; wenn nun F E : E L = H : K, so verlängere man EL, bis sie FG in P begegne; so ist FEP das gesuchte Dreyek; denn es hat den gegebenen Winkel EFG; und weil dieser Winkel durch FL

a 9. I.

E in

b 3. 6. in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist[b] $EF + FP : EP = FE : EL = H : K$.

Wenn aber $H:K$ nicht einerley ist mit $FE : EL$, so muß sie kleiner seyn, wie in dem 47sten Satz gezeigt worden; und in diesem Fall giebt es zwey Dreyecke, wovon jedes den gegebenen Winkel EFL hat, und worin die Verhältnis der Seiten, die den, der Linie FL entgegenstehenden, Winkel einschließen, mit $H:K$ einerley ist. Man finde aus dem 47sten Satz diese $\triangle\triangle$ EFM, EFN, wovon jedes EFL zum Winkel hat, und worin $FE : EM$ (oder EN) $= H:K$. Nun sey der Winkel EMF größer, und ENF kleiner als ein rechter. Demnach

f 18. 1. weil $H > K$, so ist $EF > EN$, folglich[f] ist der Winkel EFN, das ist, $NFG < ENF$. Zu jedem dieser Winkel füge man die Winkel NEF, EFN hinzu, so ist $NEF + EFG < NEF + EFN + FNE$, das ist, als zween rechte Winkel; folglich müßen die zwo geraden Linien EN, FG, verlängert einander begeg-

g ax. 12. 1. nen[g]; es geschehe in O, und man ziehe EM bis in G; so hat jedes von den $\triangle\triangle$ EFG, EFO die in dem Satz gegebenen Dinge; denn jedes hat den gegebenen Winkel EFG, und weil dieser Winkel durch die gerade FMN in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist $EF + FG : EG = (FE : EM =) H : K$; gleicherweise $EF + FO : EO = H:K$.

Satz

Satz XLIX. 46.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyeks gegeben ist, und wenn die zwo Seiten, die einen andern Winkel einschliessen, zusammengenommen eine gegebene Verhältnis zu der dritten Seite haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 48.

In dem △ ABC sey der Winkel ABC gegeben, und BA + AC, die den Winkel BAC einschließen, haben eine gegebene Verhältnis zu BC; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man setze, BAC sey durch die gerade AD in zween gleiche Theile getheilt; so ist[a] BA + AC : BC = AB : BD. Nun ist BA + AC : BC gegeben, folglich auch AB : BD; und weil der Winkel ABD gegeben ist, so ist[b] △ ABD der Gattung nach gegeben; folglich ist der Winkel BAD, und der doppelte Winkel BAC gegeben; und weil auch ABC gegeben ist, so ist[c] △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 3. 6. & 12. 5.

b 44. dat.

c 43. dat.

Ein Dreyek, das die im Satz gegebenen Dinge habe, läßt sich folgendermaaßen finden. EFG sey der gegebene Winkel, und H:K die gegebene Verhältnis; nun finde man durch den 44sten Satz das △ EFL, das EFG zu einem

seiner Winkel habe, und worin die Verhältnis der Seiten, die diesen Winkel einschließen, nämlich EF : FL = H : K; und mache den Winkel LEM = FEL. Weil nun H : K die Verhältnis ist, die die Summe zwoer Seiten des Dreyeks zu der dritten hat, so muß H > K seyn; und weil EF : FL = H : K, so ist EF > FL, und der Winkel FEL, das ist, LEM < ELF. Daher sind, wie im vorhergehenden Satze gezeigt worden, die Winkel
d ax. 12. 1. LFE + FEM < als zween rechte, folglich [d] müßen FL, EM verlängert einander begegnen: es geschehe in G, so ist △ EFG das gesuchte Dreyek; denn EFG ist einer seiner Winkel, und weil der Winkel FEG durch EL in zween gleiche Theile getheilt worden, so ist FE + EG : FG = EF : FL = H : K.

76.

Satz L.

Wenn von dem Scheitelpunct eines der Gattung nach gegebenen Dreyeks, eine gerade Linie auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen wird; so wird sie eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie haben. Fig. 49.

Von dem Scheitelpunct A des △ ABC, das der Gattung nach gegeben ist, werde AD auf die Grundlinie BC unter einem gegebenen Winkel ADB gezogen; so ist AD : BC gegeben.

Weil

Weil △ ABC der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel ABD gegeben; und weil ADB gegeben ist, so ist [a] △ ABD der Gattung nach gegeben; folglich ist AD : AB gegeben. Nun ist AB : BC gegeben; folglich [b] ist AD : BC gegeben.

a 43. dat.

b 9. dat.

Satz LI. 47.

Geradlinichte Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, lassen sich in Dreyecke theilen, die der Gattung nach gegeben sind. Fig. 5c.

Die geradlinichte Figur ABCDE sey der Gattung nach gegeben; so läßt sich ABCDE in Dreyecke theilen, die der Gattung nach gegeben sind.

Man ziehe BE, BD; weil nun ABCDE der Gattung nach gegeben ist, so ist [a] der Winkel BAE gegeben, und [a] BA : BE ist gegeben; mithin [b] ist △ BAE der Gattung nach gegeben, folglich ist der Winkel AEB gegeben [a]. Nun ist der ganze Winkel AED gegeben, mithin auch der andere Winkel BED; und weil AE : EB, wie auch AE : ED gegeben ist, so ist [c] BE : ED gegeben. Nun ist der Winkel BED gegeben, mithin [b] ist das △ BED der Gattung nach gegeben. Gleicherweise ist das

a 3. def.

b 44. dat.

c 9. dat.

△ BDC der Gattung nach gegeben: folglich lassen sich geradlinichte Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, in Dreyecke theilen, die auch der Gattung nach gegeben sind.

48. Satz LII.

Wenn zwey, der Gattung nach gegebene, Dreyecke über ebenderselben geraden Linie beschrieben werden; so haben sie eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 51.

Die der Gattung nach gegebenen △ △ ABC, ABD seyen über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben; so ist △ ABC : △ ABD gegeben.

Durch den Punct C ziehe man CE parallel mit AB, so daß sie der verlängerten DA in E begegne; dann ziehe man BE. Weil nun △ ABC der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel BAC, das ist, ACE gegeben; und weil △ ABD der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel DAB, das ist, AEC gegeben. Folglich ist [a] △ ACE der Gattung nach gegeben; mithin [b] ist EA : AC gegeben; nun ist CA : AB, wie auch BA : AD gegeben, folglich [c] ist EA : AD gegeben; ferner ist [d] △ ACB = △ AEB, und [e] △ AEB oder

a 43. dat.
b 3. def.
c 9. dat.
d 37. I.
e I. 6.

ACB

ACB : △ ADB = EA : AD; folglich weil EA : AD gegeben ist, so ist auch △ ACB : △ ADB gegeben.

Aufgabe.

Die Verhältnis zweyer △ △ ABC, ABD zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben sind.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie FG, und weil die Winkel der △ △ ABC, ABD gegeben sind, so mache man [f] an den Endpuncten F, G der geraden Linie FG, die Winkel GFH, GFK gleich BAC, BAD; und FGH, FGK gleich ABC, ABD. Mithin sind die △ △ ABC, ABD gleichwinklicht mit den △ △ FGH, FGK. Durch den Punct H ziehe man HL parallel mit FG, so daß sie der verlängerten KF in L begegne. Weil nun BAC = GFH, BAD = GFK, so ist ACE = FHL, AEC = FLH, und das △ AEC ist gleichwinklicht mit dem △ FLH. Mithin ist EA : AC = LF : FH, und CA : AB = HF : FG, und BA : AD = GF : FK, folglich *ex æquo*, EA : AD = LF : FK, Nun ist, wie gezeigt worden, △ ABC : △ ABD = EA : AD, das ist, = LF : FK. Mithin ist die Verhältnis

f. 23. 1.

LF : FK, die mit der Verhältnis der △ △ ABC, ABD einerley ist, gefunden worden.

49.
Satz LIII.

Wenn zwo der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren über ebenderselben geraden Linie beschrieben werden; so haben sie eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 52.

Zwo geradlinichte Figuren ABCDE, ABFG, die der Gattung nach gegeben sind, seyen über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben; so wird ihre Verhältnis zu einander gegeben seyn.

a 51. dat. Man ziehe AC, AD, AF, so ist[a] jedes der △ △ AED, ADC, ACB, AGF, ABF der Gattung nach gegeben; und weil die, der Gattung nach gegebenen △ △ ADE, ADC über ebenderselben Linie AD beschrieben sind,
b 52. dat. so ist[b] △ EAD : △ DAC gegeben, und *com-*
c 7. dat. *ponendo*[c] EACD : △ DAC ist gegeben. Nun ist[b] △ DAC : △ CAB gegeben, weil sie über ebenderselben Linie AC beschrieben sind;
d 9. dat. mithin ist EACD : △ ACB gegeben[d], und *componendo* ABCDE : △ ABC ist gegeben. Gleicherweise ist ABFG : △ ABF gegeben. Nun ist △ ABC : △ ABF gegeben, folglich[b]

weil

weil ABCDE : △ ABC, wie auch △ ABC : △ ABF, und △ ABF : ABFG gegeben sind, so ist[d] auch ABCDE : ABFG gegeben.

Aufgabe.

Die Verhältnis zwoer geradlinichter Figuren zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie beschrieben sind.

ABCDE, ABFG seyen zwo geradlinichte Figuren, der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben, und man ziehe AC, AD, AF. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie HK, und durch den 52sten Satz finde man die Verhältnis △ ADE : △ ADC, und mache ihr gleich HK : KL. Gleicherweise finde man die Verhältnis △ ACD : △ ACB, und mache ihr gleich KL : LM. Ferner finde man die Verhältnis △ ABC : △ ABF, und mache ihr gleich LM : MN; endlich finde man die Verhältnis △ AFB : △ AFG, und mache ihr gleich MN : NO. So wird die Verhältnis ABCDE : ABFG mit HM : MO einerley seyn.

Weil △ EAD : △ DAC = HK : KL; und △ DAC : △ CAB = KL : LM; so ist *componendo*, so oft es die Anzahl der Dreyecke erfodert, ABCDE : △ ABC = HM : ML. Gleicherweise weil △ GAF : △ FAB = ON : NM, so ist *componendo*, ABFG : △ FAB = MO : MN, und *invertendo*, △ ABF : ABFG = NM : MO; nun ist △ ABC : △ ABF = LM : MN, folglich weil ABCDE : △ ABC = HM : ML, und △ ABC : △ ABF = LM : MN, und △ ABF : ABFG = MN : MO, so ist *ex æquo* ABCDE : ABFG = HM : MO.

50.

Satz LIV.

Wenn zwo gerade Linien eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so haben die ähnlichen geradlinichten Figuren, die über denselben auf eine ähnliche Art beschrieben werden, eine gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 53.

Die geraden Linien AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und die ähnlichen und ähnlich-liegenden geradlinichten Figuren E, F seyen über denselben beschrieben; so wird E : F gegeben seyn.

Man mache AB : CD = CD : G, so ist weil AB : CD gegeben ist, auch CD : G gegeben, folglich [a] ist AB : G gegeben. Nun ist [b] AB : G = E : F; folglich ist E : F gegeben.

a 9. dat.
b 2. cor. 20. 6.

Auf-

Aufgabe.

Die Verhältnis zwoer ähnlichen geradlinichten Figuren E, F zu finden, welche über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, auf eine ähnliche Art beschrieben sind.

G sey eine dritte Proportional-Linie zu AB, CD. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade H; weil nun AB : CD gegeben ist, so mache man AB : CD = H : K, so ist wegen der gegebenen H, auch K gegeben; Man mache ferner H : K = K : L, so wird E : F = H : L seyn. Denn weil AB : CD = H : K, und AB : CD = CD : G, so ist CD : G = K : L, und *ex æquo* AB : G = H : L; nun ist[b] E : F = AB : G, das ist, = H : L.

b 2. cor. 20. 6.

Satz LV. 51.

Wenn zwo gerade Linien eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so werden die der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figuren, die über denselben beschrieben sind, eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Fig. 54.

AB,

A B, C D seyen zwo gerade Linien, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, so werden die der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figuren E, F, die über denselben beschrieben sind, eine gegebene Verhältnis zu einander haben.

Ueber der geraden A B beschreibe man die Figur A G, die der Figur F ähnlich sey, und ähnlich mit ihr liege: weil nun F der Gattung nach gegeben ist, so ist auch A G der Gattung nach gegeben; demnach, weil die der Gattung nach gegebenen Figuren E, A G, über ebenderselben geraden A B beschrieben sind, so ist[a] E : A G gegeben; und weil A B : C D gegeben ist, und über diesen Linien die ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren A G, F beschrieben sind, so ist[b] A G : F gegeben; nun ist A G : E gegeben, folglich ist E : F gegeben[c].

a 53. dat.
b 54. dat.
c 9. dat.

Aufgabe.

Die Verhältnis zwoer geradlinichter Figuren E, F zu finden, welche der Gattung nach gegeben, und über den geraden Linien A B, C D, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, beschrieben sind.

Man

Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil die geradlinichten Figuren E, AG der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben sind, so finde man aus dem 53sten Satz ihre Verhältnis, und mache derselben gleich H : K; so ist K gegeben: und weil die ähnlichen geradlinichten Figuren AG, F, über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältnis haben, beschrieben sind, so finde man aus dem 54sten Satz ihre Verhältnis, und mache derselben gleich K : L; so wird E : F = H : L. Denn *per constr.* E : AG = H : K, und AG : F = K : L, folglich *ex æquo* E : F = H : L.

Satz LVI. 52.

Wenn eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben wird; so ist die Figur der Größe nach gegeben. Fig. 55.

Die der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur ABCDE sey über der, der Gattung nach gegebenen geraden Linie AB beschrieben; so ist ABCDE der Größe nach gegeben.

Ueber

Ueber AB sey das Quadrat AF beschrieben, folglich ist AF der Gattung und Größe nach gegeben; und weil die der Gattung nach gegebenen Figuren ABCDE, AF über eben-
a 53. dat. derselben AB beschrieben sind, so ist [a] ABCDE : AF gegeben; nun ist AF der Größe nach gegeben, folglich ist auch ABCDE der Größe nach
b 2. dat. gegeben [b].

Aufgabe.

Die Größe einer geradlinichten Figur zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben ist.

Man nehme die gerade Linie GH gleich der gegebenen AB, und finde durch den 53sten Satz die Verhältnis des Quadrates AF über AB, zu ABCDE, und mache ihr gleich GH : HK, und über GH beschreibe man das Quadrat GL, und vollende das Parallelogram LHKM; so ist ABCDE = LHKM; denn AF : ABCDE = GH : HK = GL : HM; weil nun AF
c 14. 5. = GL, so ist [c] ABCDE = HM.

53.

Satz LVII.

Wenn zwo geradlinichte Figuren der Gattung nach gegeben sind, und wenn die

Seite

Seite einer derselben eine gegebene Verhältniß zu einer Seite der andern hat; so sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben. Fig. 56.

AC, DF seyen zwo der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren, und die Verhältniß der Seite AB zu der Seite DE sey gegeben; so sind auch die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

Weil AB : DE gegeben ist, wie auch [a] AB : BC und DE : EF, so ist [b] BC : EF gegeben. Gleicherweise sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

a 3. def.
b 10. dat.

Die Verhältniß BC : EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene Linie G, und weil BC : BA gegeben ist, so mache man BC : BA = G : H; eben so mache man AB : DE = H : K; ferner DE : EF = K : L; so ist *ex æquo* BC : EF = G : L, folglich ist G : L, die mit BC : EF einerley ist, gefunden worden.

Satz LVIII.

G.

Wenn zwo ähnliche geradlinichte Figuren eine gegebene Verhältniß zu einander haben, so haben ihre correspondirende Seiten auch eine gegebene Verhältniß zu einander. Fig. 57.

Die

Die zwo ähnliche geradlinichte Figuren A, B haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so werden ihre correspondirende Seiten auch eine gegebene Verhältnis zu einander haben.

CD sey correspondirend mit EF; und zu CD, EF sey G eine dritte Proportional-Linie.
a 2. cor. 20. 6. Demnach[a] ist CD:G = A:B; nun ist A:B gegeben, mithin auch CD:G; nun ist CD:
b 13. dat. EF = EF:G, folglich[b] ist CD:EF gegeben.

Die Verhältnis CD:EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil A:B gegeben ist, so mache man A:B = H:K, und nach Anleitung des 13ten Satzes finde man zwischen H und K eine mittlere Proportional-Linie L; so wird CD:EF der gefundenen H:L gleich seyn. Denn es sey CD:EF = EF:G, so ist CD:G = (A:B =) H:K; und CD:EF = H:L, wie im 13ten Satz ist gezeigt worden.

54.
Satz LIX.

Wenn zwo der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren eine gegebene Verhältnis zu einander haben, so werden ihre Seiten gleicherweise eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Fig. 58.

Die

Die zwo geradlinichten Figuren A, B, die der Lage nach gegeben sind, haben eine gegebene Verhältnis zu einander; so werden ihre Seiten auch gegebene Verhältnisse zu einander haben.

Wenn die Figur A der Figur B ähnlich ist, so werden, kraft des vorhergehenden Satzes, ihre correspondirenden Seiten eine gegebene Verhältnis zu einander haben: und weil die Figuren der Gattung nach gegeben sind, so haben[a] die Seiten von jeder derselben gegebene Verhältnisse zu einander; folglich[b] hat jede Seite von einer derselben zu jeder Seite der andern eine gegebene Verhältnis.

[a] 3. def.
[b] 9. dat.

Ist aber die Figur A der Figur B nicht ähnlich, so seyen CD, EF irgend zwo von ihren Seiten, und über EF denke man sich die Figur EG ähnlich und ähnlich=liegend mit A, so daß CD, EF die correspondirenden Seiten seyen; demnach ist EG der Gattung nach gegeben, und weil B der Gattung nach gegeben ist, so ist[c] B : EG gegeben; nun ist A : B gegeben; mithin[b] ist A : EG gegeben, und weil A der EG ähnlich ist, so ist[d] CD : EF gegeben; folglich[b] sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

[c] 53. dat.
[d] 58. dat.

Die Verhältnis CD : EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil A : B gegeben ist, so mache man A : B = H : K. Aus dem 53sten Satz finde man B : EG, und mache ihr gleich K : L. Endlich mache man H : M = M : L; so wird CD : EF = H : M, mithin gefunden seyn. Denn weil A : B = H : K, und B : EG = K : L, so ist *ex aequo* A : EG = H : L; nun sind A, EG ähnliche Figuren, und M ist eine mittlere Proportional-Linie zwischen H und L; folglich ist, wie im vorhergehenden Satz bewiesen worden, CD : EF = H : M.

55.
Satz LX.

Wenn eine geradlinichte Figur der Gattung und Größe nach gegeben ist, so werden ihre Seiten der Größe nach gegeben seyn. Fig. 59.

Die geradlinichte Figur A sey der Gattung und Größe nach gegeben, so sind ihre Seiten der Größe nach gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach
a 18. 6. gegebene gerade Linie BC, und beschreibe[a] darüber die Figur D ähnlich und ähnlich-liegend mit

mit der Figur A, und E F sey mit B C correspondirend, so ist D der Gattung nach gegeben: und weil die der Gattung nach gegebene D über der gegebenen Linie B C beschrieben ist, so ist[b] D der Größe nach gegeben; und weil A der Größe nach gegeben ist, so ist[c] A : D gegeben; und weil A der D ähnlich ist, so ist[d] E F : B C gegeben; nun ist B C gegeben, folglich ist[e] E F gegeben; und weil E F : E G gegeben ist, so ist[f] E G gegeben. Eben so läßt sich beweisen, daß jede der andern Seiten der Figur A gegeben ist.

[b] 56. dat.
[c] 1. dat.
[d] 58. dat.
[e] 2. dat.
[f] 3. def.

Aufgabe.

Eine geradlinichte Figur A zu beschreiben, die einer gegebenen Figur D ähnlich, und einer andern gegebenen H gleich sey. Es ist der 25ste S. des 6ten B. der Elem.

Weil jede der Figuren D, H gegeben ist, so ist ihre Verhältnis gegeben; wenn man nämlich[g] über der gegebenen B C das Prllgr. B K = D, und über seiner Seite C K, das Prllgr. K L = H macht, so daß der Winkel K C L = M B C ist; so wird D : H, das ist, B K : K L = B C : C L seyn. Und weil D, A einander ähnlich sind, und D : A (H) = B C : C L, so ist nach dem 58sten Satz die Verhältnis der correspondirenden Seiten B C, E F einer-

[g] cor. 45. 1.

ley mit der Verhältnis von BC zu einer mittlern Proportional = Linie zwischen BC und CL. Diese Linie EF finde man; so ist EF die Seite der zu beschreibenden Figur, correspondirend mit BC, der Seite von D; und die Figur selbst läßt sich nach dem 18ten Satz des 6ten Buches der Elem. beschreiben. Sie wird der Verzeichnung nach, der Figur D ähnlich seyn; und weil D:A

h 2. cor. 20. 6. = BC : CL[h] = BK : KL, und D =

i 45. I. BK, so ist[i] A = KL = H.

57. ## Satz LXI.

Wenn in einem, der Größe nach gegebenen Parallelogramm, eine seiner Seiten und einer seiner Winkel der Größe nach gegeben sind, so ist auch die andere Seite gegeben. Fig. 60.

In dem Prllgr ABDC, das der Größe nach gegeben ist, sey die Seite AB und der Winkel BAC der Größe nach gegeben; so ist auch die andere Seite AC gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie EF; weil nun das Prllgr

a 1. def. AD der Größe nach gegeben ist, so läßt sich[a] eine ihm gleiche geradlinichte Figur finden, und

b cor. 45. I. ein, dieser Figur gleiches, Prllgr läßt[b] sich über der

der gegebenen EF unter einem, dem gegebenen BAC gleichen Winkel beschreiben. Es sey dieß das Prllgr EFHG, das den Winkel FEG = BAC habe. Weil nun AD = EH, und A = E, so sind [c] die anliegenden Seiten in umgekehrter Verhältnis, das ist, AB:EF = EG : AC; nun sind AB, EF, EG gegeben, folglich [d] auch AC. Hieraus erhellet, wie AC zu finden ist.

c 14. 6.
d 12. 6.

Satz XLII. H.

Wenn ein Parallelogramm einen gegebenen Winkel hat, so hat das Rechtek, das durch die anliegenden Seiten formirt wird, eine gegebene Verhältnis zu dem Parallelogramm. Fig. 61.

Das Prllgr ABCD habe den gegebenen Winkel ABC; so hat AB × BC eine gegebene Verhältnis zu ABCD.

Von dem Punct A fälle man AE senkrecht auf BC; weil nun der Winkel ABC gegeben ist, wie auch AEB, so ist △ ABE der Gattung nach gegeben [a]; mithin ist BA : AE gegeben. Nun ist BA : AE = AB × BC : AE × BC [b], folglich ist AB × BC : AE × BC, das ist [c], AB × BC : ADCD gegeben.

a 43. dat.
b 1. 6.
c 35. 1.

Und es ist klar, wie die Verhältnis des Rechteks zu dem Prllgr kann gefunden werden; man mache nämlich den Winkel FHG = ABC, und ziehe von irgend einem Punct F in einer seiner Seiten, FK senkrecht auf die andere GH; so ist GF : FK = BA : AE = AB × BC : ABCD.

66. Zusatz. Und wenn △ ABC einen gegebenen Winkel ABC hat, so wird das Rechtek AB × BC, das durch die anliegenden Seiten formirt wird, eine gegebene Verhältnis zu dem △ ABC haben.

Man vollende das Prllgr ABCD, so ist, kraft dieses Satzes, AB × BC : ABCD gegeben; nun ist[d] ABCD : △ ABC gegeben; folglich ist[e] AB × BC : △ ABC gegeben.

d 14. 1.
e 9. dat.

Und die Verhältnis des Rechteks zu dem Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Man mache △ FGK, wie gezeigt worden; so ist AB × BC : △ ABC = GF : $\frac{1}{2}$ FK. Denn, wie gezeigt worden, so ist GF : FK = AB × BC : ABCD; folglich GF : $\frac{1}{2}$ FK = AB × BC : $\frac{1}{2}$ ABCD, das ist, △ ABC.

Satz

Satz LXIII. 56.

Wenn zwey Parallelogramme gleichwinklicht sind, so verhält sich eine Seite des ersten zu einer Seite des zweyten, wie die andere Seite des zweyten zu einer geraden Linie, zu der die andere Seite des ersten eben die Verhältnis hat, wie das erste Parallelogramm zu dem zweyten. Und folglich, wenn die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben ist, so ist die Verhältnis der andern Seite des ersten zu dieser geraden Linie gegeben; und wenn die Verhältnis der andern Seite des ersten zu dieser geraden Linie gegeben ist, so ist die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben. Fig. 62.

AC, DF seyen zwey gleichwinklichte Parallelogramme, so verhält sich BC, eine Seite des ersten, zu EF einer Seite des zweyten, wie DE, die andere Seite des zweyten, zu der geraden Linie, zu welcher AB, die andere Seite des ersten, eben die Verhältnis hat, wie AC zu DF.

Man verlängere AB, und mache BC : EF = DE : BG, und vollende das Prllgr BGHC; weil nun (BC) GH : EF = DE : BG, so sind die anliegenden Seiten der gleichen Winkel

BGH, DEF, in umgekehrter Verhältnis; folglich[a] ist Prllgr BH = DF; nun ist AB : BG = AC : BH, folglich AB : BG = AC : DF; nun ist BC : EF = DE : BG, folglich ist BG die gerade Linie, die die im Satz gemeldten Eigenschaften hat.

a 14. 6.

Und wenn AC : DF gegeben ist, so ist AB : BG gegeben; und hinwiederum, wenn AB : BG gegeben ist, so ist AC : DF gegeben.

74. 73.

Satz XLIV.

Wenn zwey Parallelogramme ungleiche, aber gegebene Winkel haben, und wenn eine Seite des ersten zu einer Seite des zweyten sich verhält, wie die andere Seite des zweyten zu einer gewißen geraden Linie; so wird, wenn die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben ist, die Verhältnis der andern Seite des ersten zu jener geraden Linie gegeben seyn: Und wenn die Verhältnis der andern Seite des ersten zu jener geraden Linie gegeben ist, so wird die Verhältnis des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben seyn. Fig. 63.

ABCD, EFGH seyen zwey Prllgr, welche die ungleichen aber gegebenen Winkel ABC, EFG haben; und man setze BC : FG = EF : M.

Wenn

Wenn die Verhältnis der Prllgre AC, EG gegeben ist, so ist AB : M gegeben.

An B, dem Endpunct der Linie BC, mache man den Winkel CBK = EFG, und vollende das Prllgr KBCL. Weil nun AC : EG gegeben ist, und [a] Prllgr AC = KC, so ist KC : EG gegeben; nun sind KC, EG gleichwinklicht, folglich ist [b] BC zu FG wie EF zu der geraden Linie, zu welcher KB eine gegebene Verhältnis hat, nämlich eben die, die das Prllgr KC zu EG hat; nun aber ist BC : FG = EF : M; mithin ist M die gerade Linie, zu welcher KB eine gegebene Verhältnis hat, oder KB : M ist gegeben; nun ist AB : BK gegeben, weil △ ABK der Gattung nach gegeben ist [c]; folglich ist [d] AB : M gegeben.

a 35. I.
b 63. dat.
c 43. dat.
d 9. dat.

Und wenn AB : M gegeben ist, so ist Prllgr AC : EG gegeben. Denn weil KB : BA, wie auch AB : M gegeben ist, so ist KB : M gegeben [d]; und weil Prllgr KC, EG gleichwinklicht sind, so ist [b] BC zu FG wie EF zu der geraden Linie, zu welcher KB eben die Verhältnis hat, wie Prllgr KC zu EG; nun ist KB : M gegeben, folglich ist Prllgr (KC) AC : EG gegeben.

b 63. dat.

75. Zusaz. Und wenn zwey Dreyecke ABC, EFG zween gleiche, oder ungleiche, aber gegebene Winkel ABC, EFG haben, und wenn BC, eine Seite des ersten, sich zu FG, einer Seite des zweyten, verhält, wie EF, die andere Seite des zweyten, zu einer geraden Linie M; so wird, wenn die Verhältnis der Dreyecke gegeben ist, die Verhältnis der andern Seite des ersten zu der geraden M gegeben seyn.

Denn man vollende Prllgr ABCD, EFGH; weil nun △ ABC : △ EFG gegeben ist, so ist [e] Prllgr AC : EG gegeben [f] und weil BC : FG = EF : M, so ist kraft des 63sten Satzes AB : M gegeben, wenn die Winkel ABC, EFG gleich sind; sind sie ungleich, aber gegeben, so ist AB : M kraft dieses Satzes gegeben.

e 15. 5.
f 41. 1.

Und wenn AB : M gegeben ist, so ist Prllgr AC : EG kraft eben dieser Sätze gegeben; folglich ist △ ABC : △ EFG gegeben.

68.

Satz LXV.

Wenn zwey gleichwinklichte Parallelogramme eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn eine Seite eine gegebene Verhältnis zu einer Seite hat; so wird auch die andere Seite zu der andern Seite eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 64.

Die

Die zwey gleichwinklichte Prllgr AB, CD haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und die Seite EB habe zu der Seite FD eine gegebene Verhältnis; so wird auch die andere Seite AE eine gegebene Verhältnis zu der andern CF haben.

Weil die zwey Prllgr AB, CD gleichwinklicht sind, und AB : CD gegeben ist, so ist[a] EB zu FD wie FC zu der geraden Linie, zu welcher AE eben die gegebene Verhältnis hat wie Prllgr AB zu CD. Diese gerade Linie sey EG; folglich ist AE : EG gegeben; und weil EB : FD = FC : EG, so ist, weil EB : FD gegeben ist, auch FC : EG gegeben; und weil AE : EG, wie auch FC : EG gegeben ist, so ist[b] AE : CF gegeben.

a 63. dat.

b 9. dat.

Die Verhältnis AE : CF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil Prllgr AB : CD gegeben ist, so mache man H : K dieser Verhältnis gleich; und weil FD : EB gegeben ist, so mache man K : L derselben gleich; so wird AE : CF = H : L, mithin gefunden seyn. Denn weil EB : FD = FC : EG, so ist FD : EB = EG : FC; nun ist[a] AE : EG = (Prllgr AB : CD =) H : K, und EG : FC = (FD : EB =) K : L; folglich *ex æquo* AE : FC = H : L.

69. Satz XLVI.

Wenn zwey Parallelogramme ungleiche, aber gegebene Winkel, und eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird, wenn eine Seite eine gegebene Verhältnis zu einer Seite hat, auch die andere Seite eine gegebene Verhältnis zu der andern Seite haben. Fig. 65.

Die zwey Prllgr ABCD, EFGH, worin die ungleichen Winkel ABC, EFG gegeben sind, haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und es sey BC:FG gegeben; so wird auch AB : EF gegeben seyn.

An B, dem Endpunct der geraden Linie BC mache man den Winkel CBK gleich dem gegebenen EFG, und vollende das Prllgr BKLC; weil nun jeder der Winkel BAK, AKB
a 43. dat. gegeben ist, so ist[a] das △ ABK der Gattung nach gegeben; mithin ist AB : BK gegeben; und weil (hyp.) Prllgr AC : EG gegeben ist,
b 35. 1. und[b] AC = BL, so ist BL : EG gegeben; und weil BL mit EG gleichwinklicht, und
c 65. dat. (hyp.) BC : FG gegeben ist, so ist[c] KB : EF gegeben; nun ist KB : BA gegeben; folglich
d 9. dat. ist[d] AB : EF gegeben.

Die

Die Verhältnis AB : EF läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme die, der Lage und Größe nach gegebene, Linie MN, und mache den Winkel NMO gleich dem gegebenen BAK, und den Winkel MNO gleich dem gegebenen EFG oder AKB; weil nun Prllgr BL mit EG gleichwinklicht ist und eine gegebene Verhältnis zu ihm hat, und BC : FG gegeben ist, so finde man aus dem 65sten Satz die Verhältnis KB : EF, und mache NO : OP derselben gleich; dann wird AB:EF = MO:OP, mithin gefunden seyn. Denn weil $\triangle$ ABK mit $\triangle$ MON gleichwinklicht ist, so ist AB : BK = MO : ON, und weil KB: EF = NO: OP, so ist *ex æquo* AB : EF = MO:OP.

Satz LXVII. 70.

Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogramme gegebene Verhältnisse zu einander haben; so werden die Parallelogramme eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Fig. 66.

Die zwey Prllgr ABCD, EFGH seyen gleichwinklicht, und AB : EF, wie auch BC : FG seyen gegeben; so ist Prllgr AC : EG gegeben.

Man

Man nehme eine der Größe nach gegebene K, und weil AB : EF gegeben ist, so mache
a 2. dat. man AB : EF = K : L; mithin [a] ist L gegeben; und weil BC : FG gegeben ist, so mache man BC : FG = L : M; mithin [a] ist M ge-
b 1. dat. geben; nun ist K gegeben, folglich auch [b] K : M. Endlich ist Prllgr AC : EG = K : M, wie in dem 23sten S. des 6ten Buches der Elem. bewiesen ist; folglich ist AC : EG gegeben.

Hieraus erhellet, wie die Verhältnis zweyer gleichwinklichten Prllgr kann gefunden werden, wenn die Verhältnisse ihrer Seiten gegeben sind.

70.

Satz LXVIII.

Wenn die Seiten zweyer Parallelogramme, die ungleiche, aber gegebene Winkel haben, gegebene Verhältnisse zu einander haben, so wird die Verhältnis der Parallelogramme gegeben seyn. Fig. 67.

In den zwey Prllgr ABCD, EFGH, die die gegebenen ungleichen Winkel ABC, EFG haben, seyn die Verhältnisse ihrer Seiten, nämlich AB : EF, und BC : FG, gegeben; so wird Prllgr AC : EG gegeben seyn.

An

An B, dem Endpunct von BC, mache man den Winkel CBK gleich dem gegebenen EFG, und vollende Prllgr KBCL. Weil nun jeder der Winkel BAK, BKA, gegeben ist, so ist [a] △ ABK der Gattung nach gegeben; mit- a 43. dat.
hin ist AB : BK gegeben; und weil AB : EF gegeben ist, so ist [b] BK : EF gegeben; nun ist b 9. dat.
BC : FG gegeben, und der Winkel KBC = EFG, folglich [c] ist Prllgr KC : EG gegeben; c 67. dat.
und weil Prllgr KC = AC [d], so ist AC : EG d 35. 1.
gegeben.

Die Verhältnis der Prllgr AC, EG läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme die, der Lage und Größe nach gegebene MN, und mache den Winkel MNO gleich dem gegebenen KAB, und NMO gleich dem gegebenen AKB oder FEH; weil nun AB : EF gegeben ist, so mache man AB : EF = NO : P; gleicherweise mache man BC : FG = P : Q; so wird Prllgr AC : EG = MO : Q.

Denn weil KAB = MNO, und AKB = NMO, so ist △ AKB mit △ NMO gleichwinklicht; folglich ist KB : BA = MO : ON; und weil BA : EF = NO : P, so ist *ex æquo*, KB : EF = MO : P; ferner weil BC : FG = P : Q, und die Prllgr KC, EG gleichwinklicht sind, so ist, wie im 67sten S. gezeigt worden, Prllgr (KC) AC : EG = MO : Q.

Zusatz.

71. Zusatz. 1. Wenn zwey △ △ ABC, DEF zween gleiche, oder zween ungleiche, aber gegebene Winkel ABC, DEF haben, und wenn die Verhältnisse der anliegenden Seiten, nämlich AB : DE, und BC : EF gegeben sind; so wird die Verhältnis der Dreyecke gegeben seyn. Fig. 68.

Denn man vollende die Prllgr BG, EH, so ist[a] BG : EH gegeben; nun ist[b] $\frac{1}{2}$ BG = △ ABC, und $\frac{1}{2}$ EH = △ EDF, folglich[c] ist △ ABC : EDF gegeben.

a 67. oder 68. dat.
b 34. 1.
c 15. 5.

72. Zusatz. 2. Wenn die Grundlinien BC, EF zweyer △ △ ABC, DEF eine gegebene Verhältnis zu einander haben; und wenn auch die geraden Linien AG, DH, die von den entgegengesetzten Winkeln auf die Grundlinien, entweder unter gleichen, oder ungleichen aber gegebenen Winkeln AGC, DHF gezogen werden, eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird △ ABC : △ DEF gegeben seyn. Fig. 69.

Denn man ziehe BK, EL parallel mit AG, DH, und vollende die Prllgr KC, LF. Weil nun die Winkel AGC, DHF, oder KBC, LEF entweder gleich, oder ungleich, aber gegeben sind, und AG : DH, das ist, KB : LE, wie auch BC : EF gegeben sind; so ist

ist[a] Prllgr KC:LF, folglich auch[b] △ ABC: △ DEF gegeben.

a 67. oder 68. dat.
b 41. 1. / 15. 5.

Satz LXIX.

61.

Wenn ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel hat, an die Seite einer der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figur angelegt wird; so wird; wenn die Figur eine gegebene Verhältnis zu dem Parallelogramm hat, das Parallelogramm der Gattung nach gegeben seyn. Fig. 70.

ABCD sey eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur, und an eine ihrer Seiten AB werde das Prllgr ABEF, das den gegebenen Winkel ABE hat, angelegt; so wird, wenn ABCD eine gegebene Verhältnis zu dem Prllgr BF hat, BF der Gattung nach gegeben seyn.

Durch den Punct A ziehe man AG parallel mit BC, und durch den Punct C ziehe man CG parallel mit AB, und verlängere GA, CB bis zu den Puncten H, K; weil nun[a] der Winkel ABC, wie auch AB:BC in der, der Gattung nach gegebenen ABCD gegeben ist, so ist[a] Prllgr BG der Gattung nach gegeben. Und weil die zwo, der Gattung nach gegebenen, geradlinichten Figuren BD, BG über ebenderselben ge-

a 3 def.

b 53. dat. raden Linie A B beschrieben sind, so ist[b] BD : BG gegeben; nun ist (*hyp.*) BD : BF gegeben,
c 9. dat. folglich[c] ist (BF) BH : BG gegeben,
d 1. 6. mithin[d] ist die Verhältnis der geraden Linien KB : BC gegeben; und weil BC : BA gegeben ist, so ist[c] KB : BA gegeben. Ferner weil der Winkel ABC gegeben ist, so ist der Nebenwinkel ABK gegeben; und weil ABE gegeben ist, ist der Rest KBE gegeben; auch ist EKB gegeben, weil er gleich ABK ist; folglich ist △ BKE der Gattung nach gegeben; mithin ist EB : BK gegeben; nun ist KB : BA gegeben, mithin[c] ist EB : BA gegeben; und weil der Winkel ABE gegeben ist, so ist[a] Prllgr BF der Gattung nach gegeben.

Ein dem Prllgr BF ähnliches Prllgr läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene LM; weil nun die Winkel ABK, ABE gegeben sind, so mache man NLM = ABK, und NLO = ABE. Ferner weil BF : BD gegeben ist, so mache man BF : BD = LM : P; und weil die Verhältnis der Figuren BD : BG gegeben ist, so finde man diese Verhältnis aus dem 53sten S. und mache derselben P : Q gleich. Ferner weil CB : BA gegeben ist, so mache man derselben Q : R gleich, und nehme LN = R; durch den Punct M ziehe man OM parallel mit LN,

und

und vollende das Prllgr N L O S; so wird NLOS dem Prllgr BF ähnlich seyn.

Denn weil der Winkel ABK = NLM, und ABE = NLO, so ist KBE = MLO, nun ist BKE = LMO, weil ABK = NLM; mithin sind die △ △ BKE, LMO gleichwinklicht; folglich ist BE : BK = LO : LM; ferner weil BF : BD = LM : P, und BD : BG = P : Q, so ist *ex æquo*, (BF)[e] BH : BG = LM : Q; nun ist[f] BH : BG = KB : BC, folglich KB : BC = LM : Q; weil nun BE : BK = LO : LM, und BK : BC = LM : Q, und BC : BA = Q : R, so ist *ex æquo* BE : BA = LO : R = LO : LN; nun ist der Winkel ABE = NLO, folglich ist das Prllgr BF dem LS ähnlich.

e 35. 1.
f 1. 6.

Satz LXX.

Wenn zwo gerade Linien eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und über der einen davon, eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur, über der andern aber ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel hat, beschrieben wird; so ist, wenn die Figur eine gegebene Verhältnis zu dem Parallelogramm hat, das Parallelogramm der Gattung nach gegeben. Fig. 71.

Die zwo gerade Linien A B, C D haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und über A B sey die der Gattung nach gegebene Figur A E B, über C D aber das Prllgr D F, das den gegebenen Winkel F C D hat, beschrieben; so ist, wenn △ A E B : Prllgr D F gegeben ist, das Prllgr D F der Gattung nach gegeben.

Ueber der geraden Linie A B denke man sich das Prllgr A G, dem Prllgr F D ähnlich, und ähnlich mit ihm liegend beschrieben. Weil nun A B : C D gegeben ist, und über A B und C D die ähnlichen geradlinichten Figuren A G, F D
a 54. dat. beschrieben sind, so ist [a] A G : F D gegeben; nun
b 9. dat. ist F D : △ A E B gegeben; mithin [b] ist △ A E B : A G gegeben; ferner ist der Winkel A B G gegeben, weil er gleich F C D ist; weil demnach das Prllgr A G, das einen gegebenen Winkel A B G hat, an die Seite A B einer, der Gattung nach gegebenen Figur A E B angelegt,
c 69. dat. und △ A E B : A G gegeben ist, so ist [c] Prllgr A G der Gattung nach gegeben; nun aber ist F D dem A G ähnlich, folglich ist F D der Gattung nach gegeben.

Ein dem F D ähnliches Prllgr läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; weil nun △ A E B : F D gegeben ist, so mache man ihr die Verhältnis H : K gleich; eben so, weil C D :

AB gegeben ist, finde man aus dem 54sten S. die Verhältnis, die die, über CD beschriebene Figur FD, zu der über AB beschriebenen ähnlichen Figur AG hat, und mache derselben K : L gleich; weil nun H : K, und K : L gegeben sind, so ist[b] H : L gegeben; weil demnach △ AEB : FD = H : K, und FD : AG = K : L, so ist *ex æquo* △ AEB : AG = H : L; mithin ist △ AEB : AG gegeben; weil nun △ AEB der Gattung nach gegeben, und das Prllgr AG an die Seite AB unter einem gegebenen Winkel ABG angelegt ist, so läßt sich aus dem 69sten Satz ein dem AG ähnliches Prllgr finden; es sey Prllgr MN; MN ist also dem FD ähnlich; denn (*constr.*) MN ist dem AG ähnlich, und AG ist dem FD ähnlich; folglich ist FD dem MN ähnlich.

b 9. dat.

Satz LXXI.

81.

Wenn die äussersten von drey geraden Proportional-Linien gegebene Verhältnisse zu den äussersten von drey andern Proportional-Linien haben, so werden auch die mittlern eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Und wenn eine äusserste eine gegebene Verhältnis zu einer äussersten, und die mittlere eine gegebene Verhältnis zu der mittlern hat; so

wird auch die andere äusserste eine gegebene Verhältnis zu der andern äussersten haben. Fig. 72.

A, B, C seyen drey gerade Proportional-Linien, und D, E, F drey andere; und A : D, wie auch C : F seyen gegeben; so wird auch B : E gegeben seyn.

Weil A : D, wie auch C : F gegeben ist,
a 67. dat. so ist[a] A × C : D × F gegeben; nun ist[b] Bq
b 17. 6. = A × C, und[b] Eq = D × F; mithin
c 58. dat. ist Bq : Eq gegeben; folglich[c] ist auch B : E gegeben.

Nun setze man, A : D und B : E seyen gegeben, so wird auch C : F gegeben seyn.

d 54. dat. Denn weil B : E gegeben ist, so ist[d] Bq : Eq gegeben; folglich[b] ist A × C : D × F
e 65. dat. gegeben; nun ist A : D gegeben, folglich[e] ist auch C : F gegeben.

Zusatz. Und wenn die äussersten von vier Proportional-Linien zu den äussersten von vier andern, gegebene Verhältnisse haben, und eine von den mittlern eine gegebene Verhältnis zu einer von den mittlern hat; so wird die andere mittlere eine gegebene Verhältnis zu der andern mittlern haben, wie sich auf eben die Art, wie im Satze zeigen läßt.

Satz

Satz LXXII. 82.

Wenn vier gerade Linien proportionell sind, so wird, wie sich die erste zu der geraden Linie verhält, zu welcher die zweyte eine gegebene Verhältnis hat, sich die dritte zu einer geraden Linie verhalten, zu welcher die vierte eine gegebene Verhältnis hat. Fig. 73.

A, B, C, D seyen vier Proportional-Linien, es sey nämlich A : B = C : D; so wird, wie sich verhält A zu der geraden Linie, zu welwelcher B eine gegebene Verhältnis hat, sich C verhalten zu einer geraden Linie, zu welcher D eine gegebene Verhältnis hat.

Es sey E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat; und man mache B : E = D : F, weil nun (*hyp.*) B : E gegeben ist, so ist D : F gegeben; und weil A : B = C : D, und B : E = D : F, so ist *ex æquo* A : E = C : F; nun ist E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, und F die, zu welcher D eine gegebene Verhältnis hat; folglich wie sich A verhält zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, so verhält sich C zu einer Linie, zu welcher D eine gegebene Verhältnis hat.

83. Satz LXXIII.

Wenn vier gerade Linien proportionell sind; so wird, wie sich die erste zu der geraden Linie verhält, zu welcher die zweyte eine gegebene Verhältnis hat, die gerade Linie, zu welcher die dritte eine gegebene Verhältnis hat, sich zu der vierten verhalten. Fig. 74.

Es sey A : B = C : D; so wird, wie sich verhält A zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, eine gerade Linie, zu welcher C eine gegebene Verhältnis hat, sich zu D verhalten.

Es sey E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, und man mache B : E = F : C; weil nun B : E gegeben ist, so ist F : C gegeben; und weil A : B = C : D, und B : E = F : C, so ist *ex æquo & per-*
a 23. 5. *turbatim* a A : E = F : D, das ist, A verhält sich zu E, zu welcher B eine gegebene Verhältnis hat, wie F, zu welcher C eine gegebene Verhältnis hat, sich zu D verhält.

64. Satz LXXIV.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen stumpfen Winkel hat; so wird der Ueberschuß des

des Quadrates der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber steht, über die Quadrate der anliegenden Seiten, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Fig. 75.

Das △ ABC habe einen gegebenen stumpfen Winkel ABC; und man verlängere die gerade Linie CB, und von dem Punct A fälle man AD senkrecht auf BC; so hat ACq — (ABq + BCq) das ist[a] 2 DB × BC eine gegebene Verhältnis zu dem △ ABC. a 12. 2.

Weil der Winkel ABC gegeben ist, so ist auch ABD gegeben; weil nun auch ADB gegeben ist, so ist[b] das △ ABD der Gattung nach gegeben, folglich ist AD : DB gegeben. b 43. dat.

Nun ist[c] AD : DB = AD × BC : DB × BC, mithin ist AD×BC : DB × BC, wie auch 2 DB × BC : AD × BC gegeben; nun ist AD × BC : △ ABC gegeben, weil[d] AD × BC = 2 △ ABC; folglich[e] ist 2 DB × BC : △ ABC gegeben; nun aber ist 2 DB × BC = ACq — (ABq+BCq), folglich hat ACq — (ABq + BCq) eine gegebene Verhältnis zu dem △ ABC. c 1. 6. d 41. 1. e 9. dat.

Die Verhältnis dieses Ueberschusses zu dem △ ABC läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie EF; weil nun der Winkel ABC gegeben ist, so mache man an dem Punct F der Linie EF, den Winkel $EFG = ABC$; man verlängere GF, und fälle EH senkrecht auf FG; so ist $ACq - (ABq + BCq) : \triangle ABC = 4\ HF : HE$.

Denn weil der Winkel $ABD = EFH$, und $ADB = EHF$, so ist $\triangle ADB$ gleichwinklicht mit dem $\triangle EHF$, folglich[f] ist $BD : DA = FH : HE$, mithin $4\ BD : DA = 4\ FH : HE$; nun ist[c] $2\ BD : DA = 2BD \times BC : DA \times BC$, und $DA : \frac{1}{2} DA = AD \times BC : (\frac{1}{2} AD \times BC)\ \triangle ABC$, mithin *ex æquo*, $2\ BD : \frac{1}{2} DA$, das ist, $4\ BD : DA$, das ist, $4\ FH : HE = 2\ BD \times BC : \triangle ABC$.

f 4. 6.
g Cor. 4. 5.

65. Satz LXXV.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen spitzigen Winkel hat; so wird der Raum, um den das Quadrat der, dem spitzigen Winkel gegenüberstehenden Seite kleiner ist als die Quadrate der anliegenden Seiten, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Fig. 76.

Das $\triangle ABC$ habe einen gegebenen spitzigen Winkel ABC, und man fälle AD senkrecht auf BC; so hat $ABq + BCq - ACq$, das

ist

ist[a], $2\,CB \times BD$ eine gegebene Verhältnis zu △ ABC. a 13.

Weil die Winkel ABD, ADB, jeder für sich, gegeben sind, so ist △ ABD der Gattung nach gegeben; mithin ist $BD : DA$ gegeben; nun ist $BD : DA = CB \times BD : CB \times DA$; folglich ist $CB \times BD : CB \times DA$ gegeben, wie auch $2\,CB \times BD : CB \times DA$; nun ist $CB \times DA :$ △ ABC gegeben, folglich[b] ist $2\,CB \times BD :$ △ ABC gegeben; nun aber ist $2\,CB \times BD = ABq + BCq - ACq$, folglich ist die Verhältnis dieses Raumes zu dem Dreyek gegeben; und sie läßt sich wie im vorhergehenden Satze finden. b dat.

Lehnsatz.

Wenn von dem Scheitelpunct A eines gleichschenklichten Dreyeks ABC irgend eine gerade Linie AD auf die Grundlinie BC gezogen wird; so ist das Quadrat der Seite AB gleich dem Rechtek aus BD, DC, den Segmenten der Grundlinie, samt dem Quadrat von AD; wird aber AD auf die verlängerte Grundlinie gezogen, so ist das Quadrat von AD gleich dem Rechtek aus BD, DC, samt dem Quadrat von AB. Fig. 77.

Fall. 1. Man theile die Grundlinie BC in zween gleiche Theile in E, und ziehe AE, die[a] auf BC senkrecht seyn wird: demnach[b] ist ABq a 8. 1. b 47. 1.

=

c 5. 2. $= AEq + EBq$; nun ist[c] $EBq = BD \times DC + DEq$; folglich ist $ABq = (AEq + DEq =)$[b] $ADq + BD \times DC$.

Der andere Fall ist auf eben diese Art in 6. 2. Elem. gezeigt worden.

67. ## Satz LXXVI.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, so wird der Ueberschuß des Quadrates der geraden Linie, die den zwo anliegenden Seiten zusammengenommen gleich ist, über das Quadrat der dritten Seite, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Fig. 78.

Das $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel BAC, so wird $(BA + AC)q - BCq$ zu $\triangle ABC$ eine gegebene Verhältnis haben.

Man verlängere BA, und nehme $AD = AC$; man ziehe DC, und verlängere sie; durch den Punct B ziehe man BE parallel mit AC; dann ziehe man AE, und mache AF auf DC senkrecht.

Weil nun $AD = AC$, so ist $BD = BE$; ferner weil BC von dem Scheitelpunct B des gleichschenklichten $\triangle DBE$ gezogen worden, so so ist, kraft des Lehnsatzes, BDq, das ist, $(BA + AC)q = DC \times CE + BCq$; mithin ist $(BA+AC)q - BCq = DC \times CE$. Dieses Rechtek hat eine gegebene Verhältnis zu dem $\triangle ABC$. Denn der Winkel BAC ist gegeben, folglich auch der Nebenwinkel CAD; ferner ist jeder von den Winkeln ADC, DCA gegeben, weil jeder die Hälfte des gegebenen BAC ist[a], mithin ist $\triangle ADC$ der Gattung nach gegeben[b]; und weil AF von dem Scheitelpunct auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen ist, so ist[c] $AF : CD$ gegeben; nun ist[d] $CD : AF = DC \times CE : AF \times CE$, und $AF \times CE : \triangle ACE$ ist gegeben[e]; folglich[f] ist $DC \times CE : \triangle ACE$, das ist[g], $\triangle ABC$ gegeben; und weil $DC \times CE = (BA + AC)q - BCq$, so ist die Verhältnis dieses Ueberschusses zu dem $\triangle ABC$ gegeben.

a 5 & 32. I.
b 43. dat.
c 50. dat.
d I. 6.
e 41. I.
f 9. dat.
g 37. I.

Die Verhältnis $DC \times CE : \triangle ABC$ läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene Linie GH, und an dem Punct G mache man den Winkel HGK gleich dem gegebenen CAD, und nehme $GK = GH$, vereinige KH, und ziehe GL senkrecht darauf; so wird $DC \times CE : \triangle ABC = HK : \frac{1}{2} GL$ seyn. Denn weil die Scheitelwinkel HGK, DAC in den gleichschenklichten Dreyecken einander gleich sind, so sind diese Drey-

Dreyecke einander ähnlich; und weil GL, AF auf den Grundlinien HK, DC senkrecht sind, so ist[h] HK : GL = DC : AF = DC × CE : AF × CE; nun ist GL : $\frac{1}{2}$ GL = AF × CE : ($\frac{1}{2}$ AF × CE) △ ACE oder △ ABC; folglich *ex æquo* HK : $\frac{1}{2}$ GL = DC × CE : △ ABC.

h {4. 6. / 22. 9.

Zusatz. Und wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, so wird der Raum, um den das Quadrat der anliegenden Seiten kleiner ist als das Quadrat der dritten Seite, eine gegebene Verhältnis zu dem Dreyek haben. Dieß läßt sich vermittelst des zweyten Falles des Lehnsatzes auf gleiche Weise, wie im vorhergehenden Satze, beweisen.

Satz LXXVII.

Wenn das von einem gegebenen Winkel eines Dreyeks auf die gegenüberstehende Seite, oder Grundlinie, herabgefällte Loth, eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie hat; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 79.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und das auf die Grundlinie BC herabgegefällte Loth AD habe eine gegebene Verhältnis zu ihr; so ist △ ABC der Gattung nach gegeben.

Wenn △ ABC ein gleichschenklichtes Dreyek ist, so ist evident[a], daß wenn einer seiner Winkel gegeben ist, auch die übrigen, jeder für sich gegeben sind; folglich ist das Dreyek der Gattung nach gegeben, ohne die Verhältnis des Lothes zur Grundlinie in Betracht zu ziehen, als welche in diesem Fall nach dem 50sten Satz gegeben ist. a 5 & 32. I.

Wenn aber △ ABC kein gleichschenklichtes Dreyek ist, so nehme man eine der Lage und Größe nach gegebene EF, und beschreibe darüber[b] einen des gegebenen Winkels BAC fähigen Kreis-Abschnitt EGF; aus H, der Mitte von EF richte man HG senkrecht auf, und ziehe EG, GF. Weil nun der Winkel EGF dem gegebenen BAC gleich, und △ EGF ein gleichschenklichtes Dreyek, △ BAC aber keines ist, so ist der Winkel FEG dem CBA nicht gleich. Man ziehe EL, so daß FEL = CBA; man vereinige FL, und fälle LM senkrecht auf EF. Weil nun die △△ ELF, BAC, wie auch die △△ MLE, DAB, gleichwinklicht sind, so ist ML : LE = DA : AB, und LE : EF = AB : BC, folglich *ex æquo* LM : EF = AD : BC; weil nun AD : BC gegeben ist, so ist auch LM : EF gegeben; und weil EF gegeben b 33. 3.

c 2. dat. geben ist, so ist[c] LM gegeben. Man vollende
das Prllgr LMFK; weil nun LM gegeben ist,
so ist FK der Größe nach gegeben; sie ist aber
auch der Lage nach gegeben, und der Punct F ist
d 30. dat. gegeben; folglich[d] ist der Punct K gegeben; und
weil die gerade Linie KL durch K mit der, der
Lage nach gegebenen, EF parallel gezogen ist,
e 31. dat. so ist[e] KL der Lage nach gegeben; und weil der
f 28. dat. Bogen ELF der Lage nach gegeben ist, so ist[f]
der Punct F gegeben. Weil nun die Puncte L,
g 29. dat. E, F gegeben sind, so sind[g] die Linien LE,
h 42. dat. EF, FL der Größe nach gegeben; mithin[h] ist
△ LEF der Gattung nach gegeben; und weil
△ ABC dem △ LEF ähnlich ist, so ist △
ABC der Gattung nach gegeben.

Weil $LM < GH$, so muß LM:EF, das ist, die gegebene Verhältnis AD : BC kleiner seyn als GH : EF, das ist, kleiner als die Verhältnis, welche die gerade Linie, wodurch die Grundlinie eines des gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnittes, in zween gleiche Theile getheilt wird, zu dieser Grundlinie hat.

Zusatz. 1. Wenn in zwey △△ ABC, LEF der Winkel BAC = ELF, und wenn das Loth AD sich zur Grundlinie BC verhält, wie das Loth LM zu der Grundlinie EF; so sind die △△ ABC, LEF einander ähnlich.

Man

Man beschreibe um das △ ELF den Kreis EGF, und ziehe LN parallel mit EF; man vereinige EN, NF, und ziehe NO senkrecht auf EF. Weil nun ENF = ELF, und EFN = FNL (*angulo alterno*) das ist, FEL, der auf eben dem Bogen steht; so ist △ NEF dem △ LEF ähnlich; und in dem Abschnitt EGF kann es über der Grundlinie EF kein anderes Dreyek geben, worin die Verhältnis des Lothes zu EF mit der Verhältnis von LM oder NO zu EF einerley wäre, weil das Loth entweder grösser oder kleiner seyn muß als LM oder NO. Nun aber kann, wie im vorhergehenden Beweise gezeigt worden, in dem Kreis-Abschnitt EGF über EF ein dem △ ABC ähnliches Dreyek beschrieben werden, und die Verhältnis seines Lothes zu der Grundlinie ist, wie gezeigt worden, einerley mit AD : BC, das ist, LM : EF; folglich muß dieses Dreyek entweder △ LEF oder △ NEF seyen, die daher dem △ ABC ähnlich sind.

Anmerkung des Uebersetzers: Dieser Beweis läßt sich auch auf folgende, vielleicht faßlichere Art vortragen.

Man beschreibe um das △ ELF den Kreis EGF, und mache den Winkel NEF = ABC, und ziehe NF, so wird, weil ENF = (ELF) BAC (*hyp.*), das △ ENF dem △ BAC ähn-

ähnlich seyn; nun fälle man von N das Loth NO auf EF, so ist, wie im Satze bewiesen worden, AD : BC = NO : EF; nun ist (*hyp.*) AD : BC = LM : EF, folglich NO : EF = LM : EF, mithin ist NO = LM. Man
i 33. 1. ziehe NL, so ist[i] NL mit OM parallel; mithin ist der Winkel NLE = LEF; nun ist NLE = NFE, folglich ist NFE = LEF, folglich ist das △ NEF dem △ ELF ähnlich; nun ist es dem △ BAC ähnlich gemacht worden, folglich ist das △ ELF dem △ BAC ähnlich.

Zusatz. 2. Wenn ein △ ABC einen gegebenen Winkel BAC hat, und wenn die Linie AR, von dem gegebenen Winkel an die gegenüberstehende Seite, unter einem gegebenen Winkel ARC gezogen, eine gegebene Verhältnis zu BC hat; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Man ziehe AD senkrecht auf BC, so ist △ ARD der Gattung nach gegeben; mithin ist AD : AR gegeben, und weil (*hyp.*) AR : BC
k 9. dat. gegeben ist, so ist[k] AD : BC gegeben; folglich[l]
l 77. dat. ist ABC der Gattung nach gegeben.

Zusatz. 3. Wenn in zwey △△ ABC, LEF der Winkel BAC = ELF, und wenn die

von

von diesen Winkeln auf die Grundlinien, unter gegebenen und gleichen Winkeln, gezogenen geraden Linien einerley Verhältnis zu den Grundlinien haben; so sind die Dreyecke einander ähnlich. Denn wenn man von den gleichen Winkeln Lothe auf die Grundlinien herabfällt, so verhält sich ein Loth zu seiner Grundlinie, wie das andere zu seiner Grundlinie m; folglich nach Zus. 1. sind die Dreyecke ähnlich. m {4. 6. 22. 5.

Ein dem △ A B C ähnliches Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Nachdem man den Kreis-Abschnitt EGF beschrieben, und die Linie GH gezogen, wie in dem Satze gewiesen worden, so finde man FK, die zu EF die gegebene Verhältnis AD : BC hat; und von dem Punct F richte man FK senkrecht über EF auf. Weil nun, wie gezeigt worden, AD:BC, das ist, FK : EF kleiner seyn muß als GH : EF; so ist FK kleiner als GH; folglich muß die, durch den Punct K mit EF parallel gezogene Linie den Bogen des Kreis-Abschnittes in zween Puncten berühren; einer davon sey L, und man ziehe EL, LF, und LM senkrecht auf EF; so wird, weil der Winkel BAC = ELF, und AD:BC = (KF) LM:EF, das △ ABC dem △ LEF ähnlich seyn, kraft des 1. Zus.

80.

Satz LXXVIII.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, und wenn die Verhältnis des Rechteckes der anliegenden Seiten zu dem Quadrate der dritten Seite gegeben ist; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 80.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und die Verhältnis BA × AC : BCq sey gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Von dem Punct A fälle man AD senkrecht
a 41. 1. auf BC, so ist[a] AD × BC : △ ABC, (das Ganze zu der Hälfte), gegeben; und weil der
b Cor. 62. dat. Winkel BAC gegeben ist, so ist[b] △ ABC : BA × AC gegeben; nun ist (*hyp.*) BA ×
c 9. dat. AC : BCq gegeben, folglich[c] ist AD × BC :
d 1. 6. BCq, das ist[d], AD : BC gegeben; folg-
e 77. dat. lich[e] ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Ein dem △ ABC ähnliches Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine, der Lage und Größe nach, gegebene Linie EF, und mache FEG gleich dem gegebenen Winkel BAC, und ziehe FH senkrecht auf EG, und BK senkrecht auf AC; folglich sind die △ △ ABK,

ABK, EFH einander ähnlich; und AD × BC, oder das ihm gleiche BK × AC : BA × AC = BK : BA = FH : FE. Nun setze man, die gegebene Verhältnis BA × AC : BCq sey gleich EF : FL; so ist *ex æquo* AD × BC : BCq, das ist, AD : BC = HF : FL; und weil AD nicht größer ist, als die Linie MN, welche in dem, um das △ ABC beschriebenen Kreis-Abschnitt auf der Mitte von BC senkrecht steht, so muß AD : BC, das ist, HF : FL, nicht größer seyn als MN : BC. Dem sey so, und man finde aus dem 77sten S. ein △OPQ, das einen seiner Winkel POQ gleich dem gegebenen BAC habe; und die Verhältnis des von diesem Winkel auf die Grundlinie PQ gesenkten Lothes sey gleich HF : FL; so wird das △ ABC dem △ OPQ ähnlich seyn. Denn, wie gezeigt worden, AD : BC = (HF : FL, das ist *per constr.* =) OR : PQ; nun ist der Winkel BAC = POQ; folglich [f] ist △ ABC dem △ POQ ähnlich.

[f] 1. Cor. 77. dat.

Anderer Beweis.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und BA × AC : BCq sey gegeben; so ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

a 76. dat. Weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist[a] die Verhältnis von (BA + AC) q — BC q zu △ ABC gegeben. Es sey (BA + AC)q — BCq = D, so ist D : △ ABC gegeben, und weil der Winkel BAC gegeben ist, so
b Cor. 62. dat. ist[b] △ ABC : BA × AC gegeben; nun ist
c 10. dat. (*hyp.*) BA × AC : BCq gegeben, folglich[c]
d 7. dat. ist D : BCq gegeben, und *componendo*[d] D + BCq : BCq ist gegeben; nun aber ist D + BCq = (BA + AC) q, mithin ist (BA +
e 59. dat. AC) q : BCq gegeben, folglich auch[e] (BA + AC) : BC; und weil der Winkel BAC ge-
f 48. dat. geben ist, so ist[f] das △ ABC der Gattung nach gegeben.

Die hieraus fließende Composition, die von den Compositionen des 76 und 48sten S. abhangt, ist verwickelter als die nächstvorhergehende, die von der des 77sten S. abhangt, welche leicht zu bewerkstelligen ist.

K.

Satz LXXIX.

Wenn ein Dreyek einen gegebenen Winkel hat, und wenn die, von diesem Winkel auf die Grundlinie gezogene, und einen gegebenen Winkel mit ihr machende Linie, die Grundlinie in Segmente theilt, die eine ge-

gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 81.

Das △ ABC habe den gegebenen Winkel BAC, und die gerade Linie AD, die, auf die Grundlinie BC gezogen, den gegebenen Winkel ADB macht, theile BC in die Segmente BD, DC, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Man beschreibe[a] um das Dreyek den Kreis ABC, und aus dem Mittelpunct E ziehe man EA, EB, EC, ED. Weil nun der Winkel BAC gegeben ist, so ist der doppelte am Mittelpunct[b] gegeben; und weil BE = EC, so ist BE : EC gegeben; mithin[c] ist △ BEC der Gattung nach gegeben, und EB : BC ist gegeben; ferner weil (*hyp.*) BD : DC gegeben ist, so ist[d] CB:BD gegeben; mithin[e] ist EB:BD gegeben, und weil der Winkel EBC gegeben ist, so ist[c] das △ EBD der Gattung nach gegeben, mithin ist EB, das ist, EA : ED gegeben, nun ist der Winkel EDA gegeben, weil jeder der Winkel BDE, BDA gegeben ist; folglich[f] ist das △ AED der Gattung nach gegeben, und der Winkel AED ist gegeben; nun ist, weil jeder der Winkel BED, BEC gege-

a 5. 4.
b 20. 3.
c 44. dat.
d 7. dat.
e 9. dat.
f 47. dat.

ben ist, auch DEC gegeben; mithin ist der Winkel AEC gegeben; nun ist wegen der Gleichheit, AE : EC gegeben; folglich [c] ist △ AEC der Gattung nach gegeben, und der Winkel ECA ist gegeben; weil nun auch ECB gegeben ist, so ist der Winkel ACB gegeben; nun ist (*hyp.*) BAC gegeben; folglich [g] ist das △ ABC der Gattung nach gegeben.

g 43. dat.

Ein dem △ ABC ähnliches Dreyek läßt sich folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie, und theile sie in zween Theile, die die gegebene Verhältnis BD : DC haben; alsdann beschreibe man über ihr einen Kreis-Abschnitt, der des gegebenen Winkels BAC fähig sey, und nachdem man von dem Theilungs-Punct unter dem gegebenen Winkel ADB eine gerade Linie gezogen hat, so ziehe man von dem Punct, wo sie dem Umfang begegnet, Linien an die Endpuncte der angenommenen Linie; so wird man ein Dreyek haben, das dem △ ABC ähnlich ist; wie sich leicht zeigen läßt.

Der Beweis läßt sich auch auf eben die Art machen, wie der in dem 77sten S. und der im 77sten S. wie der in diesem.

Satz

Satz LXXX. L.

Wenn zwo Seiten eines Dreyeks eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn das, von dem eingeschlossenen Winkel auf die Grundlinie gefällte Loth eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie hat; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 82.

Die Seiten BA, AC in dem △ ABC haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und das Loth AD habe eine gegebene Verhältnis zu der Grundlinie BC; so wird das △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Es sey erstlich AB = AC, so theilt[a] das Loth AD die Grundlinie BC in zween gleiche Theile; folglich weil (*hyp.*) AD : BC gegeben ist, so ist auch AD : DB gegeben, und weil ADB gegeben ist, so ist[b] das △ ABD, folglich auch △ ABC der Gattung nach gegeben.[c]

a 26. I.
b 44. dat.
c. 43. dat.

Wenn aber die Seiten ungleich sind, und BA > AC; so mache man den Winkel CAE = ABC; weil nun der Winkel AEB den beyden △ △ AEB, CEA gemein ist, so sind sie einander ähnlich; mithin ist AB : BE

= CA : AE, und *permutando* BA : AC =
BE : EA = EA : EC; nun ist BA : AC
gegeben, folglich auch BE : EA, und EA :
d 9. dat. EC, wie auch [d] BE : EC; folglich [e] ist EB :
e 6. dat. BC gegeben; nun ist (*hyp.*) AD : BC gege-
ben, mithin [d] ist AD : BE gegeben; ferner ist,
wie gezeigt worden, BE : EA gegeben, folglich
ist AD : AE gegeben, und weil ADE ein rech-
ter Winkel ist, so ist △ ADE der Gattung nach
f 46. dat. gegeben [f], und der Winkel AEB ist gegeben;
gleicherweise ist BE : EA gegeben, folglich ist [b]
△ ABE der Gattung nach gegeben, und der
Winkel EAB, wie auch ABE, das ist, CAE
ist gegeben; mithin ist der Winkel BAC gege-
g 43. dat. ben; und weil auch ABC gegeben ist, so ist [g]
△ ABC der Gattung nach gegeben.

Wie sich ein Dreyek finden läßt, das die
in dem Satz gegebenen Dinge hat, ist evident im
ersten Fall. Um es in dem zweyten Fall desto
leichter zu finden, muß man bemerken, daß,
wenn man die Linie EF gleich EA auf EB nach
B zu, legt, der Punct F die Grundlinie in die
Segmente BF, FC theilt, die sich zu einander
verhalten wie BA : AC. Denn weil, wie ge-
zeigt worden, BE : (EA) EF = EF : EC,
* 19. 5. so ist* BF : FC = BE : (EF) EA, das ist,
BA : AC; nun kann AE nicht kleiner seyn als
die Höhe des △ ABC, aber sie kann derselben
gleich

gleich seyn: ist dieses; so läßt sich in diesem Fall das Dreyek, wie auch die Verhältnis der Seiten folgendermaaßen finden, wenn nämlich (*hyp.*) die Verhältnis des Lothes zur Grundlinie gegeben ist. Man nehme die der Lage und Größe nach gegebene GH zur Grundlinie des zu findenden Dreyeks, und die gegebene Verhältnis des Lothes zur Grundlinie sey K : GH, das ist, K sey dem Lothe gleich; nun setze man, GLH sey das zu findende Dreyek; demnach, wenn man den Winkel HLM = LGH gemacht hat, so wird erfodert, daß LM senkrecht auf GM, und gleich K sey; und weil GM : ML = ML : MH, so wie vorhin BE : EA = EA : EC war, so ist GM × MH = MLq. Nun theile man GH in N in zween gleiche Theile, so ist[h] GM × HM + NHq = NMq, oder MLq + NHq = NMq; da nun ML oder K, und NH gegeben sind, so ist NM, deren Quadrat den beyden Quadraten von ML und von NH gleich ist, gegeben, und der Punct M ist gegeben. Man richte also ML = K senkrecht über GM auf; demnach weil ML der Lage und Größe nach gegeben ist, so ist der Punct L gegeben. Man ziehe LG, LH, so wird △ LGH das gesuchte Dreyek seyn.

h 6. 2.

Denn (*constr.*) $NMq = NHq + MLq$; nun ist[h] $GM \times MH + NHq = NMq$; folglich $GM \times MH = MLq$; mithin $GM : ML = ML : MH$, mithin ist[i] $\triangle LGM$ mit $\triangle HLM$ gleichwinklicht, und der Winkel $HLM = LGM$. Demnach ist die von dem Scheitelpunct des Dreyeks gezogene ML gleich der gegebenen K, sie steht senkrecht auf der Grundlinie, und macht den Winkel $HLM = LGH$; wie gefodert war. Endlich verhält sich GL zu LH, wie GM zu ML, das ist, wie die, aus GN, der Hälfte der Grundlinie, und NM, deren Quadrat den Quadraten von GN und von K gleich ist, zusammengesezte Linie sich zu der Linie K verhält.

i 6. 6.

Ob nun $GM : ML$ grösser oder kleiner sey als die Verhältnis der Seiten irgend eines andern Dreyeks, das auf der Grundlinie GH steht, und dessen Höhe der geraden Linie K gleich ist, das ist, dessen Scheitelpunct in der, durch L mit GH parallel gezogenen Linie liegt; das läßt sich also finden. Eines solcher Dreyecke sey $\triangle OGH$, und man ziehe OP so daß der Winkel $HOP = OGH$; mithin ist wie vorhin, $GP : PO = PO : PH$, und PO kann nicht gleich seyn LM, weil sonst $GP \times PH$ gleich seyn würde $GM \times MH$, welches unmöglich ist; denn der Punct P kann nicht auf M fallen, weil alsdann O auf L fallen

würde

würde: auch kann PO nicht kleiner seyn als LM; folglich ist sie größer; folglich ist (POq) $GP \times PH > (LMq) GM \times MH$, mithin ist $GP > CM$; nun (*) ist $GM : MH > GP : PH$, folglich[k] $GMq : MLq < GPq : POq$, mithin ist $GM : ML > GP : PO$; nun aber ist $GM : ML = GL : LH$, und $GP : PO = GO : OH$; mithin ist $GL : LH > GO : OH$; folglich ist $GL : LH$ die gröste unter allen, folglich muß die gegebene Verhältnis der größern Seite zu der kleinern nicht größer seyn als diese Verhältnis. k 20. 6.

Wenn also die Verhältnis der Seiten nicht einerley ist mit der größten Verhältnis $GM : ML$, so muß sie nothwendigerweise kleiner seyn als dieselbe. Es sey irgend eine kleinere Verhältnis gegeben, und man nehme wie vorhin an, daß GH die Grundlinie, und K der Höhe des Dreyeks gleich sey; so läßt sich das Dreyek folgendermaassen finden. Man theile GH in dem Punct Q, so

(*) Dieß beruht auf folgendem Satz: Wenn $A > B$, und C irgend eine dritte Größe, so ist $A : B > (A + C) : (B + C)$. Denn es sey $A : B = C : D$, so ist, weil $A > B$, auch $C > D$; und $A : B = A + C : B + D$; nun ist $B + D < B + C$, folglich[l] $A + C : B + D > A + C : B + C$, folglich $A : B > A + C : B + C$. 18. 5.

so daß $GQ : QH$ gleich sey der gegebenen Verhältnis der Seiten; ferner setze man $GQ : QH$
m 19. 5. $= GP : PQ$ mithin[m] $GP : PQ = PQ : PH$; mithin $GPq : PQq = GP : PH$; und weil $GM : ML = ML : MH$, so ist $GMq : MLq = GM : MH$; nun ist $GQ : QH$, das ist, $GP : PQ < GM : ML$; mithin auch $GPq : PQq < GMq : MLq$; folglich $GP : PH < GM : MH$, und *dividendo* $GH : HP$
n 10. 5. $< GH : HM$; folglich[n] ist $HP > HM$, und $GP \times PH$, das ist, $PQq > GM \times MH$, das ist, MLq, mithin ist $PQ > ML$. Nun ziehe man LR parallel mit GP, und von P richte man PR senkrecht über GP auf; weil nun $PQ > ML$ oder PR, so muß der aus dem Mittelpunct P mit dem Halbmesser PQ beschriebene Kreis, die Linie LR in zween Puncten schneiden; sie seyen O, S, und man ziehe OG, OH, SG, SH; so hat jedes von den Dreyecken OGH, SGH die in dem Satz gegebenen Dinge. Denn man ziehe OP; weil nun $GP : (PQ)\,PO = PO : PH$, so ist $\triangle\, OGP$ mit $\triangle\, HOP$ gleichwinklicht; mithin ist $OG : GP = HO : OP$, und *permutando* $GO : OH = GP : PO = GP : PQ = GQ : QH$. Folglich ist in dem $\triangle\, OGH$ die Verhältnis der Seiten $GO : OH$ einerley mit der gegebenen Verhältnis $GQ : QH$; und das Loth hat zur Grundlinie die gegebene Verhältnis $K : GH$, weil das Loth gleich LM oder

oder K ist. Eben dieses läßt sich auf eben die Art von dem △ SGH beweisen.

Diese Verzeichnung, wodurch △ OGH ist gefunden worden, ist kürzer, als die, welche sich aus dem Beweise des Datum herleiten ließe; weil nämlich die Grundlinie GH der Lage und Größe nach gegeben ist, welches in dem Beweise nicht angenommen war. Eben das ist in dem nächstfolgenden Satze zu bemerken.

Satz LXXXI.

M.

Wenn zwo Seiten eines Dreyeks ungleich sind und eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und wenn das von dem eingeschlossenen Winkel auf die Grundlinie gefällte Loth dieselbe in Segmente theilt, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 83.

ABC sey ein Dreyek, dessen Seiten um den Winkel BAC ungleich seyen, und eine gegebene Verhältnis zu einander haben, und das auf die Grundlinie BC gefällte Loth AD theile dieselbe in die Segmente BD, DC, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird △ ABC der Gattung nach gegeben seyn.

Es

Es sey AB $>$ AC, und man mache den Winkel CAE $=$ ABC, so werden, wegen des gemeinschaftlichen Winkels AEB, die $\triangle\triangle$
a 4. 6. ABE, CAE gleichwinklicht seyn; folglich [a] AB : BE $=$ CA : AE, und *permutando* AB : AC $=$ BE : EA $=$ EA : EC; nun ist BA : AC gegeben, mithin ist BE : EA,
b 9. dat. wie auch EA : EC gegeben, folglich [b] ist BE :
c cor. 6. dat. EC, wie auch [c] EC : CB gegeben; ferner weil
d 7. dat. BD : DC gegeben ist (*hyp.*) so ist [d] BC : CD gegeben; mithin [b] ist EC : CD, folglich [d] auch DE : EC gegeben; nun ist angezeigter maaßen EC : EA gegeben, folglich [b] ist DE : EA gegeben; folglich weil ADE ein rechter Winkel ist,
e 46. dat. so ist [e] $\triangle$ ADE der Gattung nach gegeben, und der Winkel AED ist gegeben; mithin, weil CE :
f 44. dat. EA gegeben ist, so ist [f] $\triangle$ AEC der Gattung nach gegeben, folglich ist ACE, wie auch der Nebenwinkel ACB gegeben. Gleicherweise, weil BE : EA gegeben ist, so ist $\triangle$ BEA der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel ABE gegeben; und weil der Winkel ACB gegeben ist,
g 43. dat. so ist [g] $\triangle$ ABC der Gattung nach gegeben.

Allein die Verhältnis der größern Seite BA zu der andern AC, muß kleiner seyn als die Verhältnis des größern Segments BD zu DC. Denn BAq : ACq $=$ BDq $+$ DAq : DCq $+$
h 81. dat. not. (*) DAq; nun ist [h] BDq $+$ DAq : DCq $+$ DAq $<$

$<$ BDq : DCq, weil BDq $>$ DCq; mithin ist BAq : ACq $<$ BDq : DCq, folglich BA : AC $<$ BD : DC.

Da diesem so ist, so läßt sich ein Dreyek, das die in dem Satz gegebenen Dinge haben wird, und dem das △ BBC ähnlich ist, folgendermaaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie GH, und theile sie in K so, daß GK : KH gleich sey der gegebenen BA : AC; ferner theile man GH in L so, daß GL : LH gleich sey der gegebenen BD : DC, und richte LM senkrecht über GH auf. Weil nun, wie gezeigt worden, die Verhältnis der Seiten eines Dreyeks kleiner ist, als die Verhältnis der Segmente der Grundlinie, so ist GK : KH $<$ GL : LH, mithin muß der Punct L zwischen K und H fallen; nun mache man GK : KH $=$ GN : NK, so ist [i] GN : NK $=$ i 19. 5.
NK : NH. Nun beschreibe man aus dem Mittelpunct N mit dem Halbmesser NK einen Kreis, dessen Umfang dem Loth LM in O begegne, und ziehe OG, OH; so ist △ OGH das gesuchte Dreyek. Denn weil GN : (NK) NO $=$ NO : NH, so ist △ OGN mit △ HON gleichwinklicht, mithin OG : GN $=$ HO : ON, und *permutando* GO : OH $=$ GN : (NO) NK $=$ GK : KH, das ist, gleich der gegebenen Verhältnis der Seiten, und GL, LH haben

(*constr.*) zu einander die gegebene Verhältniß der Segmente der Grundlinie.

60. Satz LXXXII.

Wenn ein der Gattung und Größe nach gegebenes Parallelogramm um einen der Größe nach gegebenen Gnomon (*) vermehrt oder vermindert wird; so sind die Seiten des Gnomons der Größe nach gegeben. Fig. 84.

Es werde erstlich das der Gattung und Größe nach gegebene Prllgr AB um den gegebenen Gnomon ECBDFG vermehrt; so ist jede der geraden Linien CE, DF gegeben.

Weil AB der Gattung und Größe nach, und der Gnomon ECBDFG der Größe nach gegeben ist, so ist der ganze Raum AG der Größe nach
a {2 def. 2 & 14.6. gegeben; nun ist AG auch der Gattung nach gegeben, weil es [a] dem Prllgr AB ähnlich ist,
b 60. dat. mithin sind [b] die Seiten von AG gegeben; folglich

(*) Man muß sich aus 2. *def.* 2. *Elem.* erinnern, daß, wenn man durch einen Punct der Diagonale eines Parallelogrammes Linien zieht, die mit den Seiten parallel sind, der Gnomon drey Parallelogramme begreift, durch deren zwey die Diagonale nicht geht. Uebers.

lich ist jede der geraden Linien AE, AF gegeben; und da jede der Linien CA, AD gegeben ist[b], so ist[c] jeder der Reste EC, DF gegeben. c 4. dat.

Zweytens werde das, der Gattung und Größe nach, gegebene Prllgr AG um den gegebenen Gnomon ECBDFG vermindert; so wird jede der geraden Linien CE, DF gegeben seyn.

Weil das Prllgr AG, so wie sein Gnomon ECBDFG gegeben ist, so ist der Rest AB der Größe nach gegeben; nun ist er auch der Gattung nach gegeben, weil[a] er dem Prllgr AG ähnlich[a] ist; mithin[b] sind seine Seiten CA, AD gegeben; nun ist jede der Linien EA, AF gegeben; folglich ist jede der Linien EC, DF gegeben. a 2 def. 2.&24.5. b 60. dat.

Der Gnomon und seine Seiten CE, DF lassen sich im ersten Fall folgendermaaßen finden. Es sey H der gegebene Raum, dem der Gnomon soll gleich gemacht werden, und man finde[d] ein Prllgr, das dem AB ähnlich, und den Figuren AB + H gleich sey, und lege seine Seiten AE, AF von dem Punct A auf die geraden Linien AC, AD, und vollende das Prllgr AG, das um eben die Diagonale liegt[e] wie AB; weil nun AG = AB + H, so wird, wenn man von beyden Seiten AB wegnimmt, der Gnomon ECBDFG gleich H seyn; folglich ist ein der d 25. 6. e 26. 6.

Figur H gleicher Gnomon, samt seinen Seiten CE und DF gefunden worden. Auf gleiche Weise lassen sich diese Dinge in dem zweyten Falle finden, wo die gegebene Figur H kleiner seyn muß als die Figur FE, wovon sie soll weggenommen werden.

58. ## Satz LXXXIII.

Wenn ein Parallelogramm, das einem gegebenen Raume gleich ist, auf einem Segment einer gegebenen geraden Linie steht, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht, und die Verlängerung des ersten ausmacht, der Gattung nach gegeben ist; so sind die Seiten dieses leztern Parallelogrammes gegeben. Fig. 85.

Das Prllgr AC, das einem gegebenen Raume gleich ist, stehe auf dem Segment AD der gegebenen Linie AB, und das Prllgr BDCL, das auf dem andern Segmente DB steht, und die Verlängerung des ersten ist, sey der Gattung nach gegeben; so wird jede der Linien CD, DB gegeben seyn.

Man theile AB in zween gleiche Theile in E, so ist EB der Größe nach gegeben; über EB beschreibe man [a] das Prllgr EF, das dem Prllgr

a 18. 6.

DL

DL ähnlich sey und ähnlich mit ihm liege; so ist EF der Gattung nach gegeben, und es liegt um eben die Diagonale [b] wie DL. Es sey BCG diese Diagonale, und man verzeichne die Figur; weil nun die der Gattung nach gegebene Figur EF über der gegebenen Linie EB beschrieben ist, so ist [c] EF der Größe nach gegeben, und der Gnomon ELH ist gleich [d] der gegebenen Figur AC; weil nun [e] EF um den gegebenen Gnomon ELH vermindert ist, so sind die Seiten des Gnomons EK, FH gegeben; nun ist EK = DC, und FH = DB; folglich sind CD, DB, jede für sich, gegeben.

b 26. 6.
c 56. dat.
d 36 & 43. I.
e 82. dat.

Dieser Beweis ist die Analysis der Aufgabe des 28sten S. 6. B. und die Verzeichnung und der Beweis dieses Satzes ist die Composition der Analysis; und weil der gegebene Raum AC, oder der ihm gleiche Gnomon ELH, soll weggenommen werden von der Figur EF, die der BC ähnlich und über der Hälfte von AB beschrieben ist, so muß AC nicht größer seyn als EF, wie in dem 27sten S. 6. B. gezeigt worden.

Satz XXXIV. 59.

„ Wenn ein Parallelogramm, das einem gegebenen Raume gleich ist, auf dem gegebenen Segment einer geraden Linie steht, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht und die Verlängerung des ersten ausmacht, der Gattung nach gegeben ist; so sind die Seiten des leztern Parallelogrammes gegeben. Fig. 86.

Das Prllgr AC, das einem gegebenen Raume gleich ist, stehe auf dem gegebenen Segment AB der Linie AD, und das Prllgr BDCL, das auf dem andern Segmente steht, und die Verlängerung des ersten ist, sey der Gattung nach gegeben; so wird jede der Linien CD, DB gegeben seyn.

Man theile AB in zween gleiche Theile in E, so ist EB der Größe nach gegeben; über EB
a 18. 6. beschreibe man [a] ein Prllgr EF, das dem Prllgr LD ähnlich sey und ähnlich mit ihm liege; mithin ist EF der Gattung nach gegeben, und es
b 26. 6. liegt [b] um eben die Diagonale wie LD. Es sey CBG diese Diagonale, und man verzeichne die Figur; weil nun die der Gattung nach gegebene Figur EF über der gegebenen Linie EB beschrie-
c 56. dat. ben ist, so ist [c] EF der Größe nach gegeben, und
d 36. & 43. 1. der Gnomon ELH ist gleich [d] der gegebenen Fi-
e 82. dat. gur AC; weil nun [e] EF um den gegebenen Gnomon ELH vermehrt ist, so sind die Seiten des Gnomons EK, FH gegeben; nun ist EK =

CD,

CD, und FH = BD; folglich sind CD, DB, jede für sich, gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der Aufgabe in dem 29sten S. 6. B. deren Verzeichnung und Beweis die Composition der Analysis ist.

Zusatz. Wenn ein der Gattung nach gegebenes Parallelogramm auf einer geraden Linie steht, wovon ein Segment gegeben ist, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht und einen Theil des ersten ausmacht, einem gegebenen Raume gleich ist: so sind die Seiten des erstern gegeben.

Das der Gattung nach gegebene Prllgr ADCE stehe auf der geraden Linie AD, wovon das Segment AB gegeben ist, und das Prllgr BDCG, das auf dem andern Segmente steht, sey einem gegebenen Raume gleich; so werden die Seiten AD, DC des erstern gegeben seyn.

Man ziehe die Diagonale DE des Prllgr AC, und verzeichne die Figur. Weil nun [a] Prllgr AK gleich dem gegebenen BC ist, so ist AK gegeben; und weil BK dem AC ähnlich ist [b], so ist BK der Gattung nach gegeben. Weil demnach das, der Größe nach gegebene Prllgr AK auf der Linie AD steht, wovon das Segment AB gegeben ist, und das Prllgr BK,

a 43. 1.

b 24. 6.

das auf dem andern Segmente steht, der Gattung nach gegeben ist; so sind, zu Folge dieses Satzes, BD, DK, die Seiten des leztern Parallelogramms, gegeben; mithin, weil die Linie AB gegeben ist, so ist das Ganze AD, wie auch DC, die zu AD eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Aufgabe.

An AB, das gegebene Segment einer Linie, ein Parallelogramm anzulegen, das einem gegebenen ähnlich, und dessen Theil, der auf dem andern Segmente steht, einem gegebenen Raume gleich sey.

c 29. 6. An die gegebene Linie AB lege man [c] das Prllgr AK, das einem gegebenen Raume gleich, und dessen Theil BK einem gegebenen Prllgr ähnlich sey. Man ziehe DF, die Diagonale von BK, und durch den Punct A ziehe man AE parallel mit BF, bis sie der verlängerten DF in E begegne, und vollende das Prllgr AC.

Das Prllgr BC ist gleich [a] dem AK, das ist, dem gegebenen Raum; und Prllgr AC ist [b] dem BK ähnlich; und dieß ist es was gesucht worden ist.

Satz

Satz LXXXV. 84.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn der Unterschied der geraden Linien gegeben ist, jede derselben gegeben seyn. Fig. 87.

AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und BC — AB sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es sey DC = BC — AB, mithin BD = BA. Man vollende das Prllgr AD; weil nun AB = BD, so ist AB : BD gegeben; und weil der Winkel ABD gegeben ist, so ist das Prllgr AD der Gattung nach gegeben; mithin weil das gegebene Prllgr AC an dem gegebenen Segment DC liegt, und Prllgr AD, das ein Theil davon ist, der Gattung nach gegeben ist, so sind [a] die Seiten dieses leztern gegeben; mithin ist BD gegeben; nun ist DC gegeben, mithin ist das Ganze BC gegeben; und weil auch AB gegeben ist, so ist jede der Linien AB, BC gegeben.

[a] 84. dat.

85. ## Satz LXXXVI.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn die Summe der geraden Linien gegeben ist, jede derselben gegeben seyn. Fig. 88.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und AB + BC sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Man verlängere CB und mache BD = AB, und vollende das Prllgr ABDE. Weil nun DB = BA, und der Winkel ABD, wegen des gegebenen Nebenwinkels ABC, gegeben ist, so ist Prllgr AD der Gattung nach gegeben; und weil AB + BC gegeben ist, und AB = BD, so ist DC gegeben. Weil demnach das gegebene Prllgr AC auf dem Segment BC der gegebenen Linie DC steht, und das Prllgr AD, das auf dem andern Segmente DB steht, der
a 83. dat. Gattung nach gegeben ist, so sind [a] die Seiten AB, BD des leztern gegeben; nun ist DC gegeben, mithin auch der Rest BC; folglich ist jede der geraden Linien AB, BC gegeben.

Satz

Satz LXXXVII. 87.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm, unter einem gegebenem Winkel, einschließen; so wird, wenn der Ueberschuß des Quadrates der grössern über das Quadrat der kleinern gegeben ist, jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 89.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen ein gegebenes Prllgr. AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein; so wird, wenn BCq — BAq gegeben ist, jede der Linien AB, BC, gegeben seyn.

Es sey der gegebene Unterschied BCq — BAq = CB×BD, so ist BCq — CB×BD, das ist,[a] BC×CD = BAq; weil nun der Winkel ABC des Prllgr AC gegeben ist, so ist[b] AB×BC : AC gegeben; nun ist (*hyp.*) AC gegeben, mithin auch AB×BC; ferner ist (*hyp.*) CB×BD gegeben; mithin ist die Verhältniß CB×BD : AB×BC; das ist,[c] DB : BA gegeben; folglich[d] ist DBq : BAq gegeben; nun ist BAq = BC×CD, mithin ist BC×CD : BDq wie auch 4BC×CD : BDq gegeben, mithin ist *componendo*[e] 4 BC×CD + BDq : BDq gegeben; nun aber ist[f] 4BC×CD

a 2. 2.
b 62. dat.
c 1. 6.
d 54. dat.
e 7. dat.
f 8. 2.

CD + BDq = (BC + CD)q; folglich ist
g 58. dat. (BC + CD)q : BDq, wie auch [g] BC + CD : BD gegeben; mithin *componendo* (BC + CD + BD) 2BC : BD gegeben; folglich ist BC : BD gegeben, wie auch [c] BCq : CB × BD; nun ist CB × BD = BCq — BAq, mithin gegeben, folglich ist BCq und BC gegeben; nun ist BC : BD, wie auch BD : BA gegeben,
h 9. dat. folglich ist [h] BC : BA gegeben; nun ist BC gegeben, folglich ist BA gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der folgenden Aufgabe.

Wenn ein Parallelogramm AC, das einen gegebenen Winkel ABC hat, der Größe nach gegeben ist, und wenn der Ueberschuß des Quadrates einer seiner Seiten BC, über das Quadrat der andern BA gegeben ist; die Seiten zu finden. Die Composition ist folgende.

Es sey EFG der gegebene Winkel, dem der Winkel ABC gleich seyn soll; und von irgend einem Punct E in FE fälle man EG senkrecht auf FG; nun sey EG × GH der gegebene Raum, dem das Prllgr AC soll gleich gemacht werden; und HG × GL der gegebene Unterschied BCq — BAq.

Auf

Auf dem Loth GE nehme man $GK = FE$, und $GM = 2GK$; dann ziehe man ML, und in der verlängerten GL nehme man $LN = LM$; man theile GN in O in zween gleiche Theile, und zwischen GH und GO finde man eine mittlere Proportional-Linie BC; dann mache man $OG : GL = CB : BD$, und den Winkel $CBA = GFE$, und $LG : GK = DB : BA$, und vollende das Prllgr AC; so ist $AC = EG \times GH$, und $CBq - BAq = HG \times GL$.

Denn weil $CB : BD = OG : GL$, so ist [a] $CBq : CB \times BD = HG \times GO : HG \times GL$; nun ist, weil $GO : BC = BC : GH$, $CBq = HG \times GO$, mithin ist [b] $CB \times BD = HG \times GL$. Und weil $CB : BD = OG : GL$, so ist $2CB : BD = (2OG)\ GN : GL$, und *dividendo* $BC + CD : BD = (NL)\ LM : LG$; folglich [c] $(BC + CD)q : BDq = MLq : LGq$; nun ist $(BC + CD)q = 4BC \times CD + BDq$ [d], mithin ist $4BC \times CD + BDq : BDq = MLq : LGq$, und *dividendo* $4BC \times CD : BDq = MGq : GLq$; folglich ist $BC \times CD : BDq = (\frac{1}{4}MGq)\ KGq : GLq$, das ist, $= ABq : BDq$, weil $LG : GK = DB : BA$ gemacht worden ist; folglich ist [b] $BC \times CD = ABq$; auf beyden Seiten addire man $CB \times BD$, so wird $CBq = ABq + CB \times BD$; mithin ist $CBq -$ ABq

a 1. 6.
b 14. 5.
c 22. 6.
d 8. 2.

ABq = CB × BD, das ist, dem gegebenen HG × GL. Nun fälle man von dem Punct A das Loth AP auf BC, so ist, weil der Winkel ABP = EFG, das △ ABP mit dem △ EFG gleichwinklicht; nun ist DB : BA = LG : GK gemacht worden, mithin ist CB × BD : CB × BA = HG × GL : HG × GK, nun ist CB × BA : AP × BC = (BA : AP = (FE) GK : EG =) HG × GK : HG × GE; folglich *ex æquo*, CB × BD : AP × BC = HG × GL : HG × GE; nun ist CB × BD = HG × GL, folglich ist AP × BC, das ist, Prllgr AC gleich dem gegebenen Rechtek EG × GH.

N. ## Satz LXXXVIII.

Wenn zwo gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn die Summe der Quadrate seiner Seiten gegeben ist, jede dieser Seiten gegeben seyn. Fig. 90.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Prllgr ABCD unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und ABq + BCq sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es

Es sey erstlich ABC ein rechter Winkel. Nun ist zweymal das von zwo gleichen Linien eingeschlossene Rechtek gleich der Summe ihrer Quadrate; sind aber die zwo Linien ungleich, so ist zweymal das von ihnen eingeschlossene Rechtek kleiner als die Summe ihrer Quadrate, wie aus dem 7ten S. 2. B. Elem. erhellt; demnach muß zweymal der gegebene Raum, dem das Rechtek, dessen Seiten zu finden sind, gleich ist, nicht grösser seyn als die gegebene Summe der Quadrate der Seiten: und wenn zweymal dieser Raum gleich ist der gegebenen Summe der Quadrate, so müssen die Seiten des Rechteks nothwendigerweise einander gleich seyn; in diesem Fall also beschreibe man ein Quadrat ABCD gleich dem gegebenen Rechtek, so werden AB, BC die gesuchten Seiten seyn; denn das Rechtek AC ist dem gegebenen Raume gleich, und $ABq + BCq = 2AB \times BC$, das ist, (*hyp.*) gleich dem gegebenen Raum, dem die Summe der Quadrate gleich seyn sollte.

Ist aber zweymal das gegebene Rechtek nicht gleich der gegebenen Summe der Quadrate der Seiten, so muß es, wie gezeigt worden, kleiner seyn. Es sey ABCD das Rechtek; man vereinige AC, und ziehe BE senkrecht darauf, und vollende das Rechtek AEBF; dann beschreibe man den Kreis ABC um das △ ABC, so ist [a] a Cor. 5. 4.

AC

AC sein Durchmesser; und weil $\triangle ABC$ dem
b 8. 6. $\triangle AEB$ ähnlich ist, [b] so ist $AC : CB = AB :$
BE, mithin ist $AC \times BE = AB \times BC$; nun
ist $AB \times BC$ gegeben, folglich auch $AC \times BE$;
c 47. 1. und weil $ABq + BCq$ gegeben ist, so ist [c] ACq
gegeben, mithin ist AC selbst der Größe nach ge-
geben. Nun sey AC auch der Lage nach gege-
d 32. dat. ben, so ist [d] AF der Lage nach gegeben; ferner
weil, wie gezeigt worden, $AC \times BE$, gegeben
e 61. dat. ist, und AC gegeben ist, so ist [e] BE oder AF
der Größe nach gegeben; nun ist AF auch der
Lage nach gegeben, mithin weil der Punct A ge-
f 30. dat. geben ist, so ist [f] der Punct F gegeben, und die
g 31 dat. Linie FB ist [g] der Lage nach gegeben; nun ist der
h 28. dat. Umfang ABC der Lage nach gegeben, folglich [h]
ist der Puuct B gegeben; nun sind auch die Pun-
i 29. dat. cte A, C gegeben; folglich [i] sind die geraden Li-
nien AB, BC der Lage und Größe nach gegeben.

Die Seiten AB, BC des Rechteks lassen
sich folgendermaaßen finden. Es sey $GH \times GK$
der gegebene Raum, dem das Rechtek $AB \times BC$
gleich sey; und $GH \times GL$ sey das gegebene
Rechtek, dem die Summe $ABq + BCq$ gleich
k 14. 2. sey. Nun finde man [k] ein Quadrat, das dem
Rechtek, $GH \times GL$ gleich sey, und AC, die
Seite dieses Quadrats, sey der Lage nach gegeben;
über AC, als dem Durchmesser, beschreibe man
den halben Kreis ABC, und mache $AC : GH$
=

$=$ GK : AF, und von dem Punct A setze man AF senkrecht auf AC; demnach ist[l] CA $\times$ AF $=$ GH $\times$ GK, und (*hyp.*) 2 GH $\times$ GK $<$ GH $\times$ GL, das ist, ACq, folglich 2 CA $\times$ AF $<$ ACq, und CA $\times$ AF $>$ $\frac{1}{2}$ ACq, das ist, AC $\times \frac{1}{2}$ AC; mithin ist AF kleiner als der Halbmesser des Kreises, folglich muß die, durch den Punct F mit AC parallel gezogene Linie dem Umfang in zween Puncten begegnen; einer davon sey B, und man ziehe AB, BC, und vollende das Rechtek ABCD; so ist ABCD das gesuchte Rechtek. Denn man ziehe BE senkrecht auf AC, so ist[m] BE $=$ AF, und weil der Winkel ABC in dem halben Kreis ein rechter ist, so ist[b] AB $\times$ BC $=$ AC $\times$ BE, das ist, CA $\times$ AF, welches dem gegebenen GH $\times$ GK gleich ist; und[c] ABq $+$ BCq $=$ ACq, das ist, gleich dem gegebenen Rechtek GH $\times$ GL.

l 16. 6.

m 34. 1.

b 8. 6.

Wenn aber der gegebene Winkel ABC des Prllgr AC kein rechter Winkel ist, so ist in diesem Fall[n], weil ABC ein gegebener Winkel ist, AB $\times$ BC : AC gegeben, nun ist Prllgr AC gegeben, mithin ist AB $\times$ BC gegeben; und weil ABq $+$ BCq gegeben ist, so ist, nach dem vorhergehenden Fall, jede der Seiten AB, BC gegeben.

n 62. dat.

Die Seiten AB, BC, und das Prllgr AC lassen sich folgendermaaßen finden. Es sey EFG der gegebene Winkel des Prllgr, und von irgend einem Punct E in FE fälle man EG senkrecht auf FG. Nun sey EG × FH der gegebene Raum, dem das Prllgr gleich gemacht werden soll, und EF × FK sey das gegebene Rechtek, dem die Summe der Quadrate der Seiten gleich seyn soll; und man finde nach dem vorhergehenden Fall, die Seiten eines Rechteks, das gleich sey dem gegebenen EF × FH, und worinn die Summe der Quadrate seiner Seiten gleich sey dem gegebenen EF × FK; demnach, wie in diesem Fall gezeigt worden, muß 2 EF × FH nicht größer seyn als EF × FK. Dem sey so, und AB, BC seyen die Seiten des Rechteks, unter dem Winkel ABC, gleich dem gegebenen EFG, zusammengefügt; und man vollende das Prllgr ABCD, welches das gesuchte Prllgr seyn wird.

Denn man fälle AL senkrecht auf BC; weil nun der Winkel ABL = EFG, so ist △ ABL mit △ EFG gleichwinklicht; und Prllgr AC, das ist, AL × BC : AB × BC = (AL : AB = EG : EF =) EG × FH : EF × FH; nun ist (*constr.*) AB × BC = EF × FH, folglich ist AL × BC, das ist, Prllgr AC

A C = dem gegebenen E G × F H; und (*constr.*) A B q + B C q = dem gegebenen E F × F K.

Satz LXXXIX. 80.

Wenn zwo gerade Linien ein gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen, und wenn der Ueberschuß des Quadrates der einen davon über einen gegebenen Raum, eine gegebene Verhältnis hat zu dem Quadrat der andern; so wird jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 91.

Die zwo geraden Linien A B, B C schliessen das gegebene Prllgr A C unter dem gegebenen Winkel A B C ein, und der Ueberschuß des Quadrates von B C über einen gegebenen Raum habe eine gegebene Verhältnis zu dem Quadrat von A B; so wird jede der Linien A B, B C gegeben seyn.

Weil der Ueberschuß des Quadrates von B C über einen gegebenen Raum eine gegebene Verhältnis hat zu dem Quadrat von B A, so wird, wenn C B × B D der gegebne Raum ist, B C q — C B × B D, das ist[a] B C × C D eine a 2. 2.

gegebene Verhältnis zu BAq haben. Nun fälle man AE senkrecht auf BC, und setze $BFq = BC \times CD$; weil nun der Winkel ABC, wie
b 43. dat. auch BEA gegeben ist, so ist[b] $\triangle ABE$ der Gattung nach gegeben, und $AE : AB$ ist gegeben; und weil ($BC \times CD$, das ist,) BFq :
c 58. dat. BAq gegeben ist, so ist[c] $BF : BA$ gegeben;
d 9. dat. nun ist $AE : AB$ gegeben, mithin[d] ist AE :
e 35. I. BF gegeben, wie auch ($AE \times BC$, das ist[e],) $AC : FB \times BC$; nun ist AC gegeben, folglich ist $FB \times BC$ gegeben. Nun ist $BCq - BEq$, das ist, $BCq - BC \times CD$ gegeben, weil es[a] gleich dem gegebenen $CB \times BD$ ist; folglich weil $FB \times BC$, wie auch $BCq - BFq$
f 87. dat. gegeben ist, so ist[f] jede der Linien FB, BC gegeben; und weil $FB : BA$ gegeben ist, so sind AB, BC gegeben.

Die Composition ist folgende.

Es sey GHK der gegebene Winkel, dem der Winkel des Prllgr gleich gemacht werden soll, und von irgend einem Punct G in HG fälle man GK senkrecht auf HK. Nun sey $GK \times HL$ das Rechtek, dem das Prllgr gleich gemacht werden soll, und $LH \times HM$ sey das Rechtek, das dem gegebenen Raum gleich ist, und von dem Quadrat einer der Seiten soll weggenommen

wer=

werden; und die Verhältniß des Restes zu dem Quadrat der andern Seite sey gleich der Verhältniß des Quadrates der gegebenen Linie NH zu dem Quadrat der gegebenen Linie HG.

Nun finde man durch Hülfe des 87sten S. dat. zwo gerade Linien BC, BF, die ein dem gegebenen NH×HL gleiches Rechtek einschliessen, so daß BCq — BFq gleich sey dem gegebenen LH×HM, und füge CB, BF unter dem Winkel FBC gleich dem gegebenen GHK, zusammen; alsdann mache man NH : HG = FB : BA, und vollende das Prllgr AC, und fälle AE senkrecht auf BC; so ist Prllgr AC = GK×HL; und BCq — LH×HM : BAq = NHq : HGq.

Denn weil (*constr.*) BCq = BFq + LH×HM, so ist BCq — LH×HM = BFq; nun ist[g], weil NH : HG = FB : BA gemacht worden, BFq : BAq = NH : HGq, folglich ist BCq — LH×HM : BAq = NHq : HGq. g 22. 6.

Ferner weil △ GHK mit △ ABE gleichwinklicht ist, so ist HG : GK = BA : AE, und vorhin NH : HG = FB : BA, mithin *ex æquo* NH : GK = FB : AE; folglich[h] h 1. 5. NH×HL : GK×HL = FB×BC : AE

× BC; nun ist (*constr.*) NH × HL = FB
k 14. 5. × BC, folglich[k] GK × HL = AE × BC, das ist, = Prllgr AC.

Die Analysis dieser Aufgabe hätte können gemacht werden, wie in dem 86sten §. des griechischen Textes, und die Composition davon läßt sich bewerkstelligen wie die, die sich in dem 87sten §. dieser Ausgabe findet.

O.
Satz XC.

Wenn zwo gerade Linien ein gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen, und wenn das Quadrat der einen davon samt dem Raum, der eine gegebene Verhältnis zu dem Quadrat der andern hat, gegeben ist; so wird jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 92.

Die zwo geraden Linien AB, BC schließen das gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und BCq samt dem Raum, der eine gegebene Verhältnis zu ABq hat, sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es

Es sey BDq der Raum, der die gegebene Verhältnis zu ABq hat; mithin ist (*hyp.*) BCq + BDq gegeben. Von dem Punct A fälle man AE senkrecht auf BC; demnach weil die Winkel ABE, BEA gegeben sind, so ist[a] △ ABE der Gattung nach gegeben, mithin ist BA : AE gegeben; und weil BDq : BAq gegeben ist, so ist[b] BD : BA gegeben, mithin[c] ist AE : BD gegeben, wie auch (AE × BC, das ist,) AC : DB × BC; nun ist (*hyp.*) AC gegeben, mithin ist DB × BC gegeben; und weil auch BCq + BDq gegeben ist, so[d] ist jede der Linien DB, BC gegeben; folglich weil DB : BA gegeben ist, so sind AB, BC gegeben.

a 43. dat.
b 58. dat.
c 9. dat.
d 88. dat.

Die Composition ist folgende.

Es sey FGH der gegebene Winkel, dem der Winkel des Prllgr soll gleich gemacht werden; und von irgend einem Punct F in GF fälle man FH senkrecht auf GH; und FH × GK sey das Rechtek, dem das Prllgr soll gleich gemacht werden; und KG × GL sey der Raum, dem das Quadrat von einer der Seiten des Prllgr samt dem Raum, der eine gegebene Verhältnis zu dem Quadrat der andern Seite hat, soll gleich gemacht werden; und diese gegebene

Verhältnis sey eben die, die das Quadrat der gegebenen Linie M G zu dem Quadrat von GF hat.

Aus dem 88sten S. dat. finde man zwo gerade Linien DB, BC, die ein, dem gegebenen MG × GK gleiches Rechtek einschließen, so daß D Bq + B C q gleich sey dem gegebenen KG × GL; mithin, vormöge der Bestimmung der Aufgabe in jenem Satz, muß 2 MG × GK nicht grösser seyn als KG × GL. Dem sey so, und man füge die Linien DB, BC unter dem Winkel DBC gleich dem gegebenen FGH, zusammen, und mache MG : GF = DB:BA, und vollende das Prllgr AC; so ist AC = FH×GK, und BCq samt BDq, das (*constr.*) zu BAq die gegebene Verhältnis hat, die MGq zu GFq hat, ist (*constr.*) gleich dem gegebenen Rechtek KG × GL.

Man fälle AE senkrecht auf BC. Weil nun DB : BA = MG : GF (*constr.*) und BA : AE = GF : FH, so ist *ex æquo* DB : AE = MG : FH; mithin DB × BC : AE × BC = MG × GK : FH × GK; nun ist DB × BC = MG × GK, folglich AE × BC, das ist, Prllgr AC = FH × GK.

Satz

Satz XCI. 88.

Wenn eine gerade Linie, in einem der Grösse nach gegebenen Kreise gezogen, einen Kreiß = Abschnitt begränzt, der eines gegebenen Winkels fähig ist; so ist die gerade Linie der Grösse nach gegeben. Fig. 93.

In dem, der Grösse nach, gegebenen Kreise ABC sey die gerade Linie AC gezogen, und begränze den Kreis = Abschnitt AEC, der eines gegebenen Winkels fähig sey; so ist die gerade Linie AC der Grösse nach gegeben.

Man finde D den Mittelpunct des Kreises[a], und durch D ziehe man AE, und vereinige EC; so ist[b] der Winkel ACE ein rechter, mithin gegeben; und weil auch der Winkel AEC gegeben ist (*hyp.*) so ist[c] △ ACE der Gattung nach gegeben, und EA : AC ist gegeben; nun ist[d] EA der Grösse nach gegeben, weil der Kreis der Grösse nach gegeben ist; folglich[e] ist AC der Grösse nach gegeben.

a 1. 3.
b 31. 3.
c 43. dat.
d 5. def.
e 2. dat.

Satz XCII. 89.

Wenn eine der Grösse nach gegebene gerade Linie in einem der Grösse nach gegebenen Kreise gezogen ist; so begränzt sie einen Kreis-Abschnitt, der eines gegebenen Winkels fähig ist. Fig. 94.

Die der Größe nach gegebene gerade Linie AC sey in dem, der Größe nach gegebenen Kreise ABC gezogen; so wird sie einen Kreis-Abschnitt begränzen, der eines gegebenen Winkels fähig ist.

Man finde D den Mittelpunct des Kreises, und durch D ziehe man AE, und vereinige EC; weil nun jede der Linien EA, AC gegeben ist,
a 1. dat. so ist[a] ihre Verhältnis gegeben; mithin, weil
b 46. dat. ACE ein rechter Winkel ist, so ist[b] △ ACE der Gattung nach gegeben, folglich ist der Winkel AEC gegeben.

90.
Satz LCIII.

Wenn von irgend einem Punct in dem Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises zwo gerade Linien gezogen werden, die dem Umfang begegnen, und einen gegebenen Winkel einschliessen; so wird, wenn der Punct, worin die eine dem Umfang begegnet, gegeben ist, auch der Punct, worin die andere demselben begegnet, gegeben seyn. Fig. 95.

Von

Von irgend einem Punct A in dem Umfang des, der Lage nach gegebenen Kreises ABC, seyen AB, AC an den Umfang gezogen, und machen den gegebenen Winkel BAC; so wird, wenn der Punct B gegeben ist, auch der Punct C gegeben seyn.

Man nehme D den Mittelpunct des Kreises, und ziehe BD, DC; weil nun jeder der Puncte B, D gegeben ist, so ist[a] BD der Lage nach gegeben; und weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist[b] der Winkel BDC gegeben; mithin weil die Linie DC an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach gegebenen Linie BD, unter dem gegebenen Winkel BDC gezogen ist, so ist[c] DC der Lage nach gegeben; nun ist (*hyp.*) der Umfang ABC der Lage nach gegeben, folglich[d] ist der Punct C gegeben.

a 29. dat.
b 20 3.
c 32. dat.
d 28. dat.

Satz XCIV. 91.

Wenn von einem gegebenen Punct eine gerade Linie gezogen wird, die einen der Lage nach gegebenen Kreis berührt; so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben. Fig. 96.

Die

Die gerade Linie AB, von dem gegebenen Punct A gezogen, berühre den, der Lage nach gegebenen Kreis BC; so wird AB der Lage und Größe nach gegeben seyn.

Man finde D, den Mittelpunct des Kreises, und ziehe DA, DB; weil nun jeder der
a 29. dat. Puncte D, A gegeben ist, so ist [a] die gerade Linie AD der Lage und Größe nach gegeben; und
b 18. 3. weil DBA ein rechter Winkel ist [b], so ist [c] DA
c Cor. 5. 4. ein Durchmesser des, um das △ DBA beschriebenen Kreises DBA, und dieser Kreis ist da-
d 6. def. her [d] der Lage nach gegeben; nun ist auch der
e 28. dat. Kreis BC der Lage nach gegeben, folglich ist [e] der Punct B gegeben; und weil auch der Punct A gegeben ist, so ist [a] die gerade Linie AB der Lage und Größe nach gegeben.

92.
Satz XCV.

Wenn von einem gegebenen Punct ausserhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises, eine gerade Linie gezogen wird, die den Umfang des Kreises in zween Puncten schneidet; so wird das Rechtek, das durch die, zwischen dem gegebenen Punct und den Puncten des Umfanges liegende Linien formirt wird, gegeben seyn. Fig. 97.

Von

Von dem Punct A ausserhalb des, der Lage nach gegebenen Kreises B C D sey die gerade Linie A B C gezogen, die den Umfang in den Puncten B, C schneide; so wird B A X A C gegeben seyn.

Von dem Punct A ziehe man[a] A D, die den Kreis berühre; mithin[b] ist A D der Lage und Größe nach gegeben; weil demnach A D gegeben ist, so ist[c] A D q gegeben; nun ist[d] A D q = B A X A C; folglich ist B A X A C gegeben.

a 17. 3.
b 94. dat.
c 56. dat.
d 36. 3.

Satz XCVI. 93.

Wenn durch einen gegebenen Punct in einem der Lage nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird; so ist das Rechtek, das durch die, zwischen dem Punct und dem Umfang liegenden Segmente formirt wird, gegeben. Fig. 98.

Durch den Punct A innerhalb des, der Lage nach gegebenen Kreises B C E sey die gerade Linie B A C gezogen; so ist B A X A C gegeben.

Man

Man nehme D den Mittelpunct des Kreises, ziehe AD, und verlängere sie bis zu den Puncten E, F. Weil nun die Puncte A, D
a 29. dat. gegeben sind, so ist[a] A D der Lage nach gegeben, und weil (*hyp.*) der Kreis BEC der Lage
b 28. dat. nach gegeben ist, so sind[b] die Puncte E, F gegeben; nun ist der Punct A gegeben, mithin[a] ist jede der Linien EA, AF gegeben, folglich ist EA × AF gegeben, folglich auch das ihm
c 35. 3. gleiche[c] Rechteck BA × AC.

94. Satz LCVII.

Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird, die einen, eines gegebenen Winkels fähigen, Abschnitt begränzt; so wird, wenn der Winkel in dem Abschnitt, durch eine bis an den Umfang verlängerte gerade Linie in zween gleiche Theile getheilt wird, die Summe der, den gegebenen Winkel einschließenden Linien eine gegebene Verhältnis zu der theilenden Linie haben: und das Rechtek, das durch die Summe der einschliessenden Linien, und das, unter der Grundlinie des Abschnittes liegende Segment der theilenden Linie formirt ist, wird gegeben seyn. Fig. 99.

Die

Die gerade Linie B C, in dem, der Größe nach gegebenen, Kreis A B C begränze einen, des gegebenen Winkels B A C fähigen Abschnitt, und der Winkel B A C werde durch die gerade Linie A D in zween gleiche Theile getheilt; so wird B A + A C : A D, wie auch das Rechtek (B A + A C) × E D gegeben seyn.

Man ziehe B D; weil nun B C in dem der Größe nach gegebenen Kreis A B C einen Abschnitt B A C begränzt, der eines gegebenen Winkels B A C fähig ist, so ist [a] B C der Größe nach gegeben; aus eben dem Grund ist B D gegeben; mithin [b] ist B C : B D gegeben; und weil der Winkel B A C durch A D in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist [c] B A : A C = B E : E C, und *permutando* A B : B E = A C : C E, mithin [d] B A + A C : B C = A C : C E; und weil der Winkel B A E = E A C, und [e] der Winkel A C E = A D E; so ist △ A C E mit dem △ A D B gleichwinklicht; mithin ist A C : C E = A D : D B; nun ist A C : C E = B A + A C : B C, folglich B A + A C : B C = A D : D B, und *permutando* B A + A C : A D = B C : D B; nun ist B C : D B gegeben, folglich ist auch B A + A C : A D gegeben.

a 91. dat.
b 1. dat.
c 3. 6.
d 12. 5.
e 21. 3.

Zwey=

Zweytens ist das Rechtek $(BA + AC) \times DE$ gegeben. Denn weil $\triangle BDE$ gleichwinklicht ist mit dem $\triangle ACE$, so ist $BD : DE = AC : CE$, nun ist $AC : CE = BA + AC : BC$, mithin ist $BA + AC : BC = BD : DE$, folglich ist $(BA + AC) \times DE = CB \times BD$; nun ist $CB \times BD$ gegeben, folglich ist $(BA + AC) \times DE$ gegeben.

Anderer Beweis.

Man verlängere CA und mache $AF =$
a 5 & 32. I. AB, und ziehe BF; weil nun [a] der Winkel BAC doppelt so groß ist, als jeder der Winkel BFA, BAD, so ist $BFA = BAD$; nun ist auch $BCA = BDA$, mithin ist $\triangle FCB$ gleichwinklicht mit dem $\triangle ADB$; folglich ist $FC : CB = AD : DB$, und *permutando*, (FC, das ist,) $BA + AC : AD = CB : BD$; nun ist $CB : BD$ gegeben, folglich ist $BA + AC : AD$ gegeben.

Und weil der Winkel $BFC = DAC$, das ist, DBC ist, und der Winkel $ACB = ADB$, so ist $\triangle FCB$ gleichwinklicht mit dem $\triangle BDE$; mithin ist (FC) $BA + AC : CB = BD : DE$; folglich ist $(BA + AC) \times DE = CB \times BD$, welches gegeben ist, folglich ist $(BA + AC) \times DE$ gegeben.

Satz

Satz XCVIII.

Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird, die einen, eines gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnitt begränzt, und wenn der Nebenwinkel des Winkels im Abschnitt, durch eine gerade Linie, die dem Umfang aufs neu und der Grundlinie des Abschnittes begegnet, in zween gleiche Theile getheilt wird; so wird der Unterschied der, den gegebenen Winkel einschliessenden Linien eine gegebene Verhältnis zu dem, im Kreise liegenden Segment der theilenden Linie haben: und das Rechtek, das durch eben diesen Unterschied und die theilende, zwischen der verlängerten Grundlinie und dem zweyten Punct des Umfanges liegende Linie formirt wird, wird gegeben seyn. Fig. 100.

In dem der Größe nach gegebenen Kreis A B C begränze die gerade Linie B C einen, des gegebenen Winkels B A C fähigen Kreis-Abschnitt, und C A F, der Nebenwinkel von B A C, werde durch die gerade Linie D A E, die dem Umfang aufs neu in D, und der verlängerten B C in E begegnet, in zween gleiche

Theile getheilt; so wird die Verhältnis (BA — AC) : AD, wie auch das Rechtek (BA — AC) × ED, gegeben seyn.

Man ziehe BD, und durch B ziehe man BG parallel mit DE, bis sie der verlängerten AC in G begegne; weil nun BC in dem der Grösse nach gegebenen Kreis ABC den Abschnitt BAC begränzt, der eines gegebenen Winkels
a 91. dat. fähig ist, so ist[a] BC der Grösse nach gegeben. Aus eben dem Grund ist BD gegeben, weil der Winkel BAD dem gegebenen EAF gleich ist; mithin ist BC : BD gegeben; und weil der Winkel CAE = EAF, wovon CAE gleich ist dem Wechselswinkel AGB, und EAF gleich dem innern entgegengesetzten ABG, so ist AGB = ABG, und AB = AG, mithin ist GC der Unterschied zwischen AB und AC. Weil nun der Winkel BGC = GAE, das ist, EAF oder BAD; und BCG ist gleich dem innern entgegengesetzten Winkel BDA des im Kreis beschriebenen Viereks BCAD; so ist △ BGC gleichwinklicht mit dem △ BDA, folglich ist GC : CB = AD : DB, und *permutando* GC, das ist, (AB — AC) : AD = CB : DB; nun ist CB : BD gegeben, folglich ist (AB — AC) : AD gegeben.

Zwey=

Zweytens weil der Winkel GBC gleich ist dem Wechselswinkel DEB, und BCG = BDE, so ist △BCG gleichwinklicht mit dem △BDE; mithin GC : CB = BD : DE, folglich ist GC × DE = CB × BD, weil nun CB, BD gegeben sind, so ist CB × BD, mithin auch GC×DE, das ist, (AB—AC) × DE gegeben.

Satz XCIX. 95.

Wenn von einem gegebenen Punct in dem Durchmesser eines der Lage nach gegebenen Kreises, oder in dem verlängerten Durchmesser, eine gerade Linie an irgend einen Punct des Umfanges, und von diesem Punct eine gerade Linie senkrecht auf die erstere, und von dem Punct, worin diese dem Umfang wiederum begegnet, eine gerade Linie mit der ersteren parallel gezogen wird; so wird der Punct, worin die Parallel-Linie dem Durchmesser begegnet, gegeben seyn; und das, durch die zwo Parallel-Linien formirte Rechtek wird gegeben seyn. Fig. 101.

In BC dem Durchmesser des der Lage nach gegebenen Kreises ABC, oder in der verlängerten BC, werde der gegebene Punct D genommen, und von D werde eine gerade Linie DA an irgend einen Punct A in dem Umfang, und AE werde senkrecht auf DA, und von E, wo diese dem Umfang wiederum begegnet, werde EF mit DA parallel gezogen, und begegne BC in F; so ist der Punct F, wie auch AD × EF gegeben.

Man verlängere EF bis an den Umfang in G, und ziehe AG; weil nun GEA ein rechter Winkel ist, so ist [a] AG der Durchmesser des Kreises ABC, und eben so ist BC einer; mithin ist der Punct H, wo sie einander begegnen, der Mittelpunct des Kreises, folglich ist H gegeben; nun ist der Punct D gegeben, mithin ist DH der Größe nach gegeben; und weil AD mit FG parallel ist, und GH = HA, so ist [b] DH = HF, und AD = GF; nun ist DH gegeben, mithin ist HF der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, folglich [c] ist der Punct F gegeben.

a Cor. 5. 4.
b 4. 6.
c 30. dat.

Zweytens weil die gerade Linie EFG von einem gegebenen Punct F in oder ausserhalb eines, der Lage nach gegebenen Kreises ABC ge-

gezogen ist, so ist[d] das Rechtek EF X FG gegeben; nun ist GF = AD, folglich ist AD X EF gegeben.

d 95. oder 96. dat.

Satz C.

Q.

Wenn von einem gegebenen Punct in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, an irgend einen Punct im Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises eine gerade Linie und von diesem Punct eine andere gerade Linie, gezogen wird, die mit der erstern einen Winkel macht, der gleich ist dem Unterschied eines Rechten und desjenigen Winkels, welcher von der, der Lage nach gegebenen, und der, zwischen dem gegebenen Punct und dem Mittelpuncte des Kreises liegenden geraden Linie formirt wird; wenn ferner von dem Punct, worin die zweyte Linie dem Umfang wiederum begegnet, eine dritte gezogen wird, die mit der zweyten einen Winkel macht, welcher gleich ist dem, den die erste mit der zweyten macht: so ist der Punct, worin diese dritte Linie der, der Lage nach gegebenen Linie begegnet, gegeben; und das Rechtek, formirt durch die erste und das Segment der dritten, das zwischen dem Umfang und der, der Lage nach gegebenen geraden Linie liegt, ist gleicherweise gegeben. Fig. 102.

Die gerade Linie C D werde von dem gegebenen Punct C in der, der Lage nach gegebenen geraden Linie A B an den Umfang des, der Lage nach gegebenen Kreises DEF, dessen Mittelpunct G ist, gezogen; man vereinige C G, und ziehe von dem Punct D die Linie D F, so daß der Winkel C D F gleich ist dem Unterschied zwischen einem rechten und dem Winkel B C G; und von dem Punct F ziehe man F E so daß sie den Winkel D F E = C D F macht, und der Linie A B in H gegegnet: so wird der Punct H, wie auch das Rechtek C D × F H gegeben seyn.

C D, F H begegnen einander in dem Punct K, von dem man K L senkrecht auf D F ziehe; und D C begegne dem Umfang wiederum in M, und F H begegne ihm in E; dann ziehe man M G, G F, G H.

Weil der Winkel M D F = D F E, so ist [a] der Bogen M F = D E; mithin wenn man den gemeinschaftlichen Bogen M E hinzuthut oder hinwegnimmt, so ist der Bogen D M = E F, folglich die gerade Linie

a 26. 3.

nie D M = der geraden Linie E F, und der Winkel G M D =[b] G F E; mithin b 8. 1.
sind die Winkel G M C, G F H einander gleich, weil sie entweder einerley sind mit den Winkeln G M D, G F E, oder Nebenwinkel davon: und weil die Winkel K D L, L K D zusammengenommen gleich sind[c] ei- c 32. 1.
nem Rechten, das ist, (*hyp.*) den Winkeln K D L, G C B; so ist der Winkel G C B oder G C H = (L K D =) L K F oder G K H; mithin sind die Puncte C, K, H, G in dem Umfang eines Kreises, folglich ist der Winkel G C K = G H F; nun ist der Winkel G M C = G F H, und G M = G F, folglich ist[d] C G = G H, und C M d 26. 1.
= H F; weil nun C G = G H, so ist der Winkel G C H = G H C, nun ist G C H gegeben, folglich auch G H C; folglich ist C G H gegeben, und weil C G der Lage nach, samt dem Punct G gegeben ist, so ist[e] G H der Lage nach gegeben; nun ist e 32. dat.
auch C B der Lage nach gegeben, folglich ist der Punct H gegeben.

Und

Und weil H F = C M, so ist D C × F H = D C × C M; nun ist[f] D C × C M gegeben, weil der Punct C gegeben ist; folglich ist D C × F H gegeben.

f 95. oder 96. dat.

E N D E.

Samm=

Sammlung

dreyßig geometrischer Aufgaben,

nach der geometrisch = analytischen Methode aufgelöst;

und als ein praktischer Theil

den Datis beygefügt.

Aufgabe I.

Ueber einer der Lage und Größe nach gegebenen geraden Linie AB einen Kreis-Abschnitt zu beschreiben, der eines gegebenen Winkels fähig sey. Fig. 103.

Geometrische Analysis.

Man setze, ADB sey der zu findende Kreis-Abschnitt, der des gegebenen, (hier spitzigen) Winkels ADB fähig sey; und der Mittelpunct des Kreises sey C. Von A und B ziehe man AC, BC; so ist [a] der Winkel ACB gleich dem doppelten ADB, mithin gegeben; weil nun AC = CB, so ist [b] AC : CB gegeben, folglich ist das △ ACB der Gattung nach gegeben [c]; mithin ist [d] der Winkel CAB gegeben; demnach weil der Punct A in der, der Lage nach gegebenen AB gegeben ist, so ist [e] AC der Lage nach gegeben; nun ist [d] AB : AC gegeben, und

a 20. 3.
b 2. def. dat.
c 44. dat.
d 3. def. dat.
e 22. dat.

f 2. dat. und AB ist gegeben, folglich ist [f] AC auch der
g 30. dat. Grösse nach gegeben, folglich [g] ist der Punct C
h 6. def. dat. gegeben, folglich [h] ist der Kreis der Lage und Grösse nach gegeben.

Construction.

i 23. 1. An A lege man den Winkel BAE gleich dem gegebenen ADB an [i], und von A richte
k 11. 1. man über AE die Linie AC senkrecht auf [k]; von B ziehe man [i] BC so daß ABC = CAB. Aus dem Puncte C, wo AC, BC einander schneiden, mit dem Halbmesser CA beschreibe man einen Kreis; so wird dieser Kreis durch B gehen, und der Abschnitt über AB wird des gegebenen Winkels fähig seyn.

Beweis.

Weil BAE dem gegebenen spitzigen Winkel gleich ist, so fällt die senkrechte Linie AC über AB, und CAB ist daher kleiner als ein rechter Winkel; mithin ist auch ABC (= CAB) kleiner als ein rechter; weil also die zween Winkel CAB, CBA zusammen kleiner sind als zween
l axiom. 12. rechte, so [l] werden AC, BC irgendwo einander schneiden: der Punct C ist also in der Construction mit Grund als möglich angenommen worden.

Fer-

Ferner weil CBA = CAB, so ist[m] CB = CA, mithin geht der Kreis durch B. Endlich weil AE senkrecht ist auf CA, so ist[n] AE eine Tangente; folglich ist[o] der Winkel BAE gleich dem gegebenen Winkel (*constr.*) folglich ist der Kreis-Abschnitt über der Linie AB des gegebenen Winkels-fähig. Q. E. D.

m 6. 1.
n 16. 3.
o 32. 3.

Bestimmung.

Wäre der gegebene Winkel ein rechter; so fiele der Punct C auf die Mitte von AB, und AB wäre der Durchmesser des gesuchten Kreises. Wäre aber der gegebene Winkel ein stumpfer; so fiele AC unter AB, und der Punct C läge auf der entgegengesetzten Seite von AB.

Berechnung.

In dem △ ACB ist die Seite AB samt allen Winkeln gegeben; mithin läßt sich AC, der Halbmesser des Kreises, durch die Trigonometrie finden; folglich auch BC; mithin ist der Mittelpunct C bestimmt, und der Kreis-Abschnitt läßt sich gleicherweise beschreiben. Man supponirt nämlich, daß AB in eine gewiße Anzahl gleicher Theile getheilt ist, und findet durch die Trigonometrie, wie viel von dergleichen Theilen

len auf A C gehen. Wir wollen den meisten Aufgaben die Art sie zu berechnen beyfügen, um zu zeigen, daß, wenn man einmal die geometrische Analysis und Composition gefunden hat, die Linien und Winkel sich auch durch arithmetische Operationen finden lassen.

Anmerkung.

Man löset durch Hülfe dieses geometrischen Ortes sehr viele Probleme auf, wo unter den gegebenen Dingen Winkel sind. Ich habe ihn deswegen hieher gesezt, ob er sich gleich im Euklides 33. 3. Elem. befindet.

Aufgabe II.

Die Grundlinie BC, die Summe der beyden Seiten BA, AC, und der Scheitelwinkel BAC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 104.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Weil nun B C, und B A + A C gegeben sind, so
a 1. dat. ist a die Verhältnis B C : (B A + A C) gegeben,

ben, folglich weil der, zwischen B A und A C liegende Winkel B A C gegeben ist, so ist[b] das △ B A C der Gattung nach gegeben; nun ist die Grundlinie B C gegeben, folglich[c] ist das △ A B C der Größe nach gegeben; folglich[d] sind die Seiten B A, A C gegeben.

b 48. dat.
c 56. dat.
d 60. dat.

Construction.

Man nehme B D gleich der gegebenen Summe der Seiten; an D lege man den Winkel B D C gleich dem halben gegebenen Winkel an; und aus B beschreibe man mit der gegebenen B C einen Kreis, der die Linie D C in C schneide; von C ziehe man C A so daß der Winkel D C A gleich sey dem Winkel D; so wird △ A B C das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil D C A $=$ D (*constr.*) so ist[e] A C $=$ A D, mithin ist B A $+$ A C $=$ B D; ferner weil[f] B A C $=$ D $+$ D C A $=$ 2 D, so ist, weil D gleich dem halben gegebenen Winkel ist, B A C gleich dem gegebenen Winkel. Q. E. D.

e 6. 1.
f 32. 1.

Bestimmung.

Wenn der, aus B mit der gegebenen BC beschriebene Kreis der Linie DC nur in Einem Punct C begegnet, so ist DC eine Tangente, und der Winkel BCD ist ein rechter; in diesem Fall ist, wie sich leicht zeigen läßt, BA = AC, und es giebt nur ein einziges Dreyek, das der Aufgabe genug thut. Schneidet aber der Kreis die Linie DC in zween Puncten, so giebt es zwey solcher Dreyecke, wovon jedes die gegebenen Dinge hat. Erreicht aber der Kreis die Linie DC gar nicht, so hat man etwas Ungereimtes gegeben, und das Dreyek ist unmöglich. Es versteht sich, daß BA + AC grösser seyn muß als BC.

Berechnung.

In dem △BDC sind die Seiten BC, BD samt dem Winkel D gegeben, mithin läßt sich der Winkel B finden; und weil der Winkel BAC und die Grundlinie BC gegeben sind, so läßt sich das Uebrige in dem △ ABC berechnen.

An-

Anmerkung.

Wäre anstatt der Summe, der Unterschied der Seiten gegeben; so ließe sich das Problem auf eine ähnliche Art auflösen.

Aufgabe III.

Die Grundlinie B C, der Unterschied der Seiten AC, AB, und der Winkel der Grundlinie ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 105.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Man mache AD = AB, und ziehe BD; so ist DC, als der Unterschied der Seiten, gegeben; mithin[a] ist BC : CD gegeben, folglich weil der eingeschlossene Winkel C gegeben ist, so ist[b] △ BCD der Gattung nach gegeben; mithin[c] ist der Winkel BDC gegeben, folglich auch der Nebenwinkel BDA, und der, diesem gleiche ABD; mithin auch der Winkel A; weil demnach in dem △ ABC die Winkel gegeben sind, so ist[d] es der Gattung nach gegeben; folglich ist es wegen der gegebenen BC auch[e] der Größe nach gegeben; folglich[f] sind die Seiten BA, AC gegeben.

a 1. dat.
b 44. dat.
c 3. def.
d 43. dat.
e 56. dat.
f 60. dat.

Construction.

An C, den Endpunct der gegebenen BC, lege man den gegebenen Winkel BCA; auf CA nehme man CD gleich dem gegebenen Unterschied der Seiten, und ziehe BD; endlich mache man den Winkel ABD = ADB, und verlängere die Linien, bis sie sich in A schneiden: so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat die gegebene Grundlinie BC, den gegebenen Winkel C, und weil der Winkel ABD = ADB, so ist AB = AD, folglich ist AC — AB = DC, dem gegebenen Unterschied der Seiten.

Berechnung.

Sie läßt sich leicht aus der Analysis herleiten.

Bestimmung.

Wenn BA und DA in irgend einem Punct zusammentreffen sollen, so müssen die Winkel ADB, ABD zusammen kleiner als zween rechte seyn; mithin weil sie gleich sind, muß jeder klei-

kleiner als ein rechter seyn; folglich muß BDC ein stumpfer, mithin muß der gegebene Winkel C ein spitziger Winkel seyn. § 32. L

Anmerkung.

Wäre der Winkel ABC gegeben, so müßte die Seite AB verlängert werden, bis sie gleich AC wäre; und die Analysis würde der vorhergehenden ähnlich seyn.

Aufgabe IV.

Die Grundlinie BC, der Unterschied der Seiten AC, AB, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 106.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Auf AC nehme man AD = AB, und ziehe BD; so ist DC, als der Unterschied der Seiten, gegeben; folglich weil auch BC gegeben ist, so ist BC : CD gegeben. Weil nun AD = AB, so ist der Winkel ADB = ABD, mithin ist der Winkel ABC = ADB + DBC, nun

 ist

ist ADB $=$ C + DBC, folglich ABC $=$ C + 2 DBC, mithin ABC — C $=$ 2 DBC; nun ist (*hyp.*) ABC — C gegeben, folglich ist 2 DBC, wie auch DBC gegeben; mithin [a] ist das △ DBC der Gattung nach gegeben. Folglich ist, wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt worden, das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben.

[a] 47. dat.

Construction.

An B, den Endpunct der gegebenen BC, lege man den Winkel CBD gleich der Hälfte des gegebenen Unterschiedes der Winkel, und aus C schneide man mit CD, dem gegebenen Unterschied der Seiten, die Linie BD in D, und verlängere CD; alsdann mache man den Winkel DBA $=$ ADB, und verlängere BA, DA, bis sie einander in A begegnen: so ist △ ABC das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Es hat die gegebene Grundlinie BC; und weil ADB $=$ ABD (*constr.*) so ist AD $=$ AB, mithin ist DC der Unterschied der Seiten. Endlich weil DBC gleich der Hälfte des gegebenen Unterschiedes der Winkel ist, so ist, wie

aus

aus der Analysis erhellet, der Unterschied der Winkel A B C, A C B gleich dem gegebenen Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Berechnung.

Weil in dem △ B D C die Seiten B C, C D samt dem Winkel D B C gegeben sind, so läßt sich der Winkel B D C, mithin auch der Nebenwinkel A D B finden; folglich ist der Winkel A gegeben; folglich läßt sich das △ A B C berechnen.

Bestimmung.

Wenn der aus C mit C D beschriebene Kreis die Linie B D nicht erreicht, so ist das △ A B C unmöglich; berührt er aber die Linie B D nur, so sind die Linien B A, D A parallel, und es giebt auch kein Dreyek; schneidet er aber B D in zween Puncten, so giebt es zwey solcher Dreyecke, die die gegebenen Dinge haben.

Aufgabe V.

Der Scheitelwinkel B A C, und die Segmente B D, D C, in die die Grundlinie durch das von BAC gefällte Loth getheilt wird, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 107.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Weil demnach die, durch das Loth AD formirten Segmente BD, DC gegeben sind, so ist ihre Verhältnis gegeben; mithin weil von dem gegebenen Winkel BAC die Linie AD auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen ist, und die Segmente BD, DC eine gegebene Verhältnis haben, so ist[a] △ ABC der Gattung nach gegeben; und weil die Grundlinie BC gegeben ist, so ist[b] das Dreyek auch der Größe nach gegeben; folglich[c] ist alles übrige gegeben.

a 79. dat.
b 56. dat.
c 60. dat.

Construction.

In einer unbegränzten Linie nehme man BD, DC gleich den gegebenen Segmenten; über BC beschreibe man, nach der ersten Aufgabe, einen des gegebenen Winkels BAC fähigen Kreis-Abschnitt. Aus D richte man DA senkrecht über BC auf, bis sie dem Umfang in A begegne; dann vereinige man BA, CA; so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil der Kreis-Abschnitt BAC des gegebenen Winkels fähig ist, so ist der Winkel BAC gleich dem gegebenen Winkel; und es ist klar, daß das Loth die Grundlinie in die gegebenen Segmente theilt.

Berechnung.

Um das Dreyek ABC aus den gegebenen Dingen zu berechnen, muß folgender Lehnsatz vorangeschikt werden.

Wenn man in irgend einem Dreyek ABC von dem Scheitelpunct A ein Loth AD auf die Grundlinie BC herabläßt, so verhält sich die Grundlinie BC zum Unterschied der Segmente DC, BD, wie der Sinus des Scheitelwinkels BAC, zum Sinus des Unterschiedes der Winkel an der Grundlinie, oder $BC : DC - BD = \sin BAC : \sin (ABC - ACB)$. Fig. 108.

Man ziehe CE senkrecht auf AB; aus A mit AB schneide man BC in G, und vereinige AG; von C ziehe man auf die verlängerte AG das Loth CF; so ist wegen des gemeinschaftlichen

Halbmessers AC, CE : CF = sin CAB : sin CAG; nun ist wegen der ähnlichen △△ BEC CFG, CE : CF = BC : GC; folglich BC : GC = sin CAB : sin CAG, nun ist GC = DC — BD, und CAG = ABC — ACB, wie aus *constr.* erhellet; folglich BC : DC — BD = sin ABC : sin (ABC — ACB).

Demnach läßt sich aus den Dingen, die in der Aufgabe gegeben sind, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie finden; nun ist, wegen des gegebenen Scheitelwinkels BAC, die Summe dieser Winkel gegeben; folglich lassen sich die Winkel selbst finden; und das übrige in dem △ ABC läßt sich berechnen.

Anmerkung.

Sind die gegebenen Dinge die Grundlinie BC, der Scheitelwinkel BAC, und das Loth AD; so beschreibe man gleicherweise über BC einen des gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnitt; aus der Mitte von BC richte man das Loth EF auf, bis es dem Umfang in F begegne, und nehme darauf EG = AD; durch G ziehe man GA parallel mit BC, bis sie dem Umfang in A begegne, und vereinige BA, AC; so ist

△

△ A B C das gesuchte Dreyek, wie sich leicht beweisen läßt. Er erhellet zugleich, daß das gegebene Loth AD nicht größer seyn darf als EF.

Aufgabe VI.

Der Scheitelwinkel B A C, das Loth AD, und die Verhältnis der Segmente BD, DC, in die die Grundlinie durch das Loth getheilt wird, sind gegeben, das Dreyek zu finden. Fig. 109.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Demnach weil A D mit der Grundlinie einen gegebenen Winkel macht, und die Verhältnis der Segmente B D, D C gegeben ist, so ist[a] △ ABC der Gattung nach gegeben, und der Winkel ABC ist gegeben; weil nun AEB, als ein rechter, gegeben ist, so ist[b] △ ACD der Gattung nach gegeben, folglich weil AD der Größe nach gegeben ist, so ist[c] △ A B D auch der Größe nach gegeben; mithin[d] ist AB gegeben; aus eben dem Grund ist AC gegeben; folglich ist △ ABC gegeben.

a 79. dat.
b 43. dat.
c 56. dat.
d 60. dat.

Construction.

Auf eine unbegränzte Linie trage man EF, FG gleich den gegebenen Linien, die die Verhältnis der Segmente ausdrücken. Ueber EG beschreibe man einen des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis = Abschnitt, und richte aus F ein Loth auf, das dem Umfang in A begegne, und vereinige EA, GA. Von A aus schneide man AF mit dem gegebenen Loth in D, und durch den Punct D ziehe man BC parallel mit EG, so daß sie den Linien AE, AG in B und C begegne; so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat den gegebenen Winkel BAC, und das gegebene Loth AD. Ferner weil BC parallel ist mit EG, so ist[e] AD : AF = DB : EF, und AD : AF = DC : FG, folglich[f] DB : EF = DC : FG, und *permutando* BD : DC = EF : FG. Q. E. D.

e 4. 6.

f 11. 5.

Berechnung.

Weil in dem △ AEG der Scheitelwinkel EAG, und die Segmente EF, FG gegeben sind,

sind, so lassen sich, vermittelst des vorhergehenden Lehnsatzes, die Winkel AEG, AGE finden, mithin sind die Winkel ABC, ACB gegeben; nun ist in dem △ ADB das Loth AD gegeben, folglich läßt sich AB finden; und auf gleiche Weise AC; folglich läßt sich das △ ABC berechnen.

Bestimmung.

Ist das Loth AD $<$ AF, so liegt BC über EG; ist AD $=$ AF, so fällt BC auf EG; ist aber AD $>$ AF, so liegt BC unter EG.

Aufgabe VII.

Der Scheitelwinkel BAC, die Summe der Seiten BA, AC, und die Verhältnis der, durchs Loth AD formirten Segmente der Grundlinie, BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 110.

Analysis.

BAC sey das zu findende Dreyek. Weil nun der Winkel BAC gegeben ist, und AD mit BC einen gegebenen Winkel macht, auch die

Ver-

a 79. dat. Verhältnis BD : DC gegeben ist, so ist[a] das △ ABC der Gattung nach gegeben, mithin ist
b 7. dat. BA : AC gegeben, wie auch[b] BA + AC : BA; nun ist (*hyp.*) BA + AC gegeben, folg-
c 2. dat. lich[c] ist BA gegeben, folglich[d] ist △ ABC
d 56. dat. auch der Größe nach gegeben.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man EF, FG, gleich den gegebenen Linien, die die Verhältnis der Segmente ausdrücken, und beschreibe über EG einen, des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis-Abschnitt. Aus F richte man über EG das Loth FH auf, bis es dem Umfang in H begegne, und vereinige EH, GH. Auf der verlängerten EH nehme man HK = HG, und ziehe GK; alsdann nehme man KB gleich der gegebenen Summe der Seiten, und durch B ziehe man BC parallel mit EG, und CA parallel mit GH; so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil AC mit HG parallel ist, so ist KA : AC = KH : GH, nun ist KH = HG (*constr.*) mithin ist KA = AC, folglich ist BA + AC = BK, das ist, der

der gegebenen Summme der Seiten. Ferner ist[e] der Winkel BAC = EHG, das ist, dem gegebenen Scheitelwinkel. Endlich, wenn von A auf BC das Loth AD gefällt wird, so ist BD : DC = EF : FG, wie sich leicht aus 4. 6, und 11. 5 Elem. herleiten läßt; folglich haben die Segmente BD, DC die gegebene Verhältnis, Q. E. D. e 29. 1.

Berechnung.

Vermittelst des Lehnsatzes der Aufgabe V. lassen sich die Winkel an der Grundlinie EG finden, mithin auch die, ihnen gleiche Winkel ABC, ACB; nun ist, weil AC = AK, BAC = 2 K, folglich ist der Winkel K gegeben; folglich, weil BK gegeben ist, so läßt sich in dem △ BKC die Seite BC finden; mithin läßt sich das △ ABC berechnen.

Andere Auflösung. Fig. 111.

Nachdem man, wie vorhin, das △ HEG gefunden hat, so trage man auf die verlängerte HG die Linie HL gleich der gegebenen Summe der Seiten. Ferner mache man auf der verlängerten HE, von E aus, die Linie EM = HG, und vereinige LM; endlich mache man

HK

HK = HG, und durch K ziehe man KC parallel mit ML, und durch C ziehe man CB parallel mit GE; so wird HBC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil BC parallel ist mit GF, so ist HC : HG = HB : HE; und weil KC parallel ist
f 4. 6. & 19 5. Cor. mit ML, so ist[f] HC : (HK) HG = CL : KM, mithin ist HB : HE = CL : KM, nun ist (*constr.*) HK = EM, mithin HE = KM; folglich ist HB = CL, folglich BH + HC = HL, das ist, der gegebenen Summe der Seiten. Das übrige läßt sich leicht aus der *constr.* herleiten.

Anmerkung.

Ich habe diese zweyte Auflösung hier beygefügt, um zu weisen, wie einerley Problem sich auf mehrere Arten auflösen läßt. Allein die erstere Auflösung ist geometrischer; die leztere habe ich durch algebraische Kunstgriffe gefunden.

Auf-

Aufgabe VIII.

Der Scheitelwinkel BAC, die Summe der Seiten BA, AC, und der Unterschied der durchs Loth formirten Segmente BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 112.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Aus A mit der kleinern Seite AC beschreibe man einen Kreis, der die Grundlinie BC in E schneide; man vereinige EA, und verlängere BA, bis sie dem Umfang in F begegne, und ziehe FE; demnach weil AF = AC, so ist BF gleich der Summe der Seiten, mithin gegeben; und weil[a] ED = DC, so ist BE der Unterschied der Seiten, mithin gegeben. Ferner weil[b] der Winkel FEC gleich ist dem halben FAC, dieser aber, als der Nebenwinkel von BAC, gegeben ist, so ist FEC gegeben, mithin ist FEB gegeben; nun ist[c] BF:BE gegeben, folglich[d] ist das △ BEF der Gattung nach gegeben, und der Winkel BFE ist gegeben; mithin ist das △ BEF wegen der gegebenen BE auch der Größe nach gegeben; folglich[e] ist EF gegeben; aus gleichem Grund ist in dem △ AEF die Seite

a 3. 3.
b 20. 3.
c 1. dat.
d 47. dat.
e 60. dat.

AE

AE (= AC) gegeben, woraus erhellet, daß das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben ist.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man BE gleich dem gegebenen Unterschied der Segmente. Man mache den Winkel CEF gleich dem halben Nebenwinkel des gegebenen Scheitelwinkels; aus B schneide man EF mit der gegebenen Summe der Seiten in F, und vereinige BF; dann mache man den Winkel FEA = AFE; aus A mit AE beschreibe man einen Kreis, der die unbegränzte Linie in C schneide, und ziehe AC; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Daß es die gegebene Summe, und den gegebenen Unterschied hat, fällt in die Augen; und weil FEC gleich ist dem halben Nebenwinkel des gegebenen Winkels, so ist FAC gleich diesem Nebenwinkel, und BAC muß daher dem gegebenen Scheitelwinkel gleich seyn. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ BEF sind zwo Seiten und der Winkel BEF gegeben, mithin läßt sich die Seite EF, und die übrigen Winkel finden; folglich läßt sich in dem △ AEF die Seite AF, das ist AC finden; nun ist BA + AC gegeben, mithin läßt sich BA finden; und weil der Scheitelwinkel BAC gegeben ist; so läßt sich das △ BAC berechnen.

Aufgabe IX.

Der Scheitelwinkel BAC, der Unterschied der Seiten BA, AC, und der Unterschied der durchs Loth formirten Segmente BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 113.

Analysis.

ABC sey das gesuchte Dreyek. Aus A mit der kleinern Seite AC beschreibe man einen Kreis, der die Grundlinie in E, und die Seite BA in G schneide; man vereinige AE, EG, und verlängere BA bis in F, und vereinige FC; demnach weil BAC gegeben ist, so ist der Nebenwinkel F A C gegeben, mithin ist in dem gleichschenklichten △ AFC der Winkel F gegeben; nun sind[a] die Winkel E + GEC gleich zween rechten, folglich ist GEC gegeben, mithin auch sein Nebenwinkel BEG; nun ist BE der Unterschied der Segmente, folglich gegeben; und eben so ist BG, der Unterschied der Seiten gegeben; folglich ist das △ BEG der Gattung und Größe nach gegeben. Woraus erhellet, daß das △ BAC der Gattung und Größe nach gegeben ist.

a 22. 3.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man BE gleich dem gegebenen Unterschied der Segmente; an E mache man den Winkel BEn gleich der Hälfte des gegebenen Scheitelwinkels, und aus B schneide man mit dem gegebenen Unterschied der Seiten die Linie En in G; man verlängere BG, und mache den Winkel GEA = AGE; aus dem Punct A, wo GA, EA einander schneiden, mit AE beschreibe man einen Kreis, der die unbegränzte Linie in C schneide, und vereinige AC; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Man ziehe das Loth AD, und von F, wo der Kreis die verlängerte BA schneidet, vereinige man FC. Weil nun BEG + GEC gleich sind zween rechten, und eben so a F + GEC gleich sind zween rechten, so ist BEG = F, mithin ist F gleich der Hälfte des gegebenen Winkels; nun ist BAC = 2F, folglich ist BAC gleich dem gegebenen Winkel. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ BEG läßt sich die Seite EG samt dem Winkel BGE finden, mithin ist der Winkel AGE gegeben; folglich läßt sich in dem gleichschenklichten Dreyeck AGE die Seite AG finden; mithin ist AC gegeben, folglich auch AB, und das △ BAC läßt sich berechnen.

Bestimmung.

Wenn der aus B mit BG beschriebene Kreis die Linie En bloß berührt; so begegnen sich die Linien GA und EA nicht, und das △ BAC läßt sich nicht verzeichnen.

Erreicht er E n gar nicht, so ist das Dreyek gleicherweise unmöglich.

Aufgabe X.

Die Grundlinie BC, das von A auf BC gefällte Loth, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 114.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Man
a 5. 4. beschreibe[a] um dasselbe einen Kreis, dessen Mittelpunct O sey; aus D, der Mitte von BC, durch O ziehe man an den Umfang die Linie DF;
b 3. 3. sie wird[b] senkrecht auf BC seyn. Durch A ziehe man AM parallel mit BC, und AM schneide DF in E, und den Umfang in G; und man
c 22. 3. vereinige GC. Nun ist[c] AGC + ABC gleich
d 29. 1. zween rechten Winkeln, und[d] AGC + GCB ist auch gleich zween rechten, folglich ist GCB = ABC, mithin ist ACG gleich dem gegebenen Unterschied der Winkel an der Grundlinie.
e 20. 3. Nun vereinige man AO, so ist[e] der Winkel AOF = ACG, folglich gegeben; ferner ist
f 29. 1. OEA, als ein rechter Winkel[f] gegeben, folg-
g 43. dat. lich[g] ist das △ AOE der Gattung nach gegeben, mithin ist EO : OA, oder EO : OB ge-

ge=

geben; nun ist in dem, der Gattung und Größe nach gegebenen △ BDE der Winkel BED gegeben, folglich[h] ist das △ BOE der Gattung nach gegeben, und der Winkel EBO ist gegeben; folglich weil der Winkel EBD gegeben ist, so ist der Winkel OBD gegeben, folglich[g] ist das △ OBD der Gattung nach, und, wegen der gegebenen BD, auch der Größe nach gegeben; folglich ist BO gegeben.

h 47. dat.

Hieraus fließt folgende Composition.

Construction.

Man nehme die gegebene Grundlinie BC der Lage nach an, und richte aus ihrer Mitte D das Loth DF auf; auf DF nehme man DE gleich dem gegebenen Loth, und durch E ziehe man HM parallel mit BC; aus D an HM ziehe man DH, so daß EDH gleich ist dem gegebenen Unterschied der Winkel; dann vereinige man EB, und aus D mit DH schneide man die verlängerte EB in Q; aus B ziehe man BO parallel mit QD; und aus O, wo sie dem Loth DF begegnet, ziehe man OA parallel mit DH; so wird der Punct A, wo OA der HM begegnet, der Scheitelpunct, und wenn man AB, AC vereiniget, so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat, wie in die Augen fällt, die gegebene Grundlinie, und das gegebene Loth. Ferner ist wegen der Parallel-Linien, EO : ED = OA : DH, und EO : ED = OB : DQ, folglich OA : DH = OB : DQ, nun ist (*constr.*) DH = DQ, mithin ist OA = OB; folglich wird der, aus O mit OB beschriebene Kreis durch A gehen; und er wird, nachdem er HM in G geschnitten hat, auch durch C gehen. Nun vereinige man GC, so ist, wie aus der Analysis erhellet, AOE = ACG; nun ist ACG = ABC — ACB, und AOE = HDE, das ist (*constr.*) dem gegebenen Unterschied der Winkel, folglich haben ABC, ACB den gegebenen Unterschied. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ HDE läßt sich aus den gegebenen Dingen die Seite HD finden, mithin ist die gleiche DQ gegeben; nun läßt sich in dem △ BED der Winkel BED finden, folglich läßt sich in dem △ QDE der Winkel QDE finden; mithin ist der gleiche Winkel BOE gegeben; nun ist AOE gegeben, folglich auch BOA; nun ist BOA = $\frac{1}{2}$ BCA, mithin ist

BCA

BCA gegeben, folglich auch ABC, und das △ ABC läßt sich berechnen.

Andere Auflösung. Fig. 115.

ABC sey das zu findende Dreyek. Durch den Scheitelpunct A ziehe man MN parallel mit DC, so ist, wenn die Lage von BC gegeben ist, wegen des gegebenen Lothes auch die Lage von MN gegeben[a]. Aus A mit AC schneide man AB in D, und ziehe CD, so ist der Winkel BCD gleich der Hälfte des Unterschiedes der Winkel, mithin gegeben.

a 37. dat.

Nun verlängere man CD, bis sie MN in E schneide; so ist das △ BDC dem △ EDA ähnlich, folglich ist BC : CD = EA : ED; ferner wenn man auf EC von B und A die Linien BG, AF senkrecht zieht, so ist das △ BCG dem △ EAF ähnlich; folglich BC:CG = EA : EF; folglich ist CD : CG = ED : EF, und *componendo* (CD + DE) CE : CG + EF = CD : CG; nun trage man auf die verlängerte CE die Linie CG aus E nach R, so ist CG + EF = RF, mithin CE : RF = CD : ER; oder CE : RF = ($\frac{1}{2}$ CD) FC : $\frac{1}{2}$ ER, folglich $\frac{1}{2}$ ER × CE = RF × FC; nun sind CE, ER gegeben, lich ist das Rechtek RF × FC gegeben; nun ist die Linie RC der Lage und Größe nach gegeben; folglich läßt sich der Punct F finden, und FA ist der Lage nach gegeben; folglich ist[b] der Punct A gegeben, und das △ ABC ist gegeben.

b 28. dat.

Construction.

Ueber der gegebenen Grundlinie BC ziehe man MN in der gegebenen Lage; an C mache man den Winkel BCE gleich der Hälfte des gegebenen Unterschiedes; und CE schneide MN in E. Von B ziehe man BG senkrecht auf CE, und auf der verlängerten CE nehme man ER = GC; über RC, als dem Durchmesser, beschreibe man einen Kreis. Nun suche man zwischen CE und $\frac{1}{2}$ ER eine mittlere Proportional-Linie CK, und richte CK von C senkrecht auf; durch K ziehe man KL parallel mit RC; aus L, wo sie dem Umfang des Kreises begegnet, fälle man auf RC das Loth LF; an A, wo LF die MN schneidet, ziehe man BA, CA, so ist △ ABC das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Es hat die gegebene Grundlinie, und das gegebene Loth. Ferner ist, wie aus der Analy-

sis

ses erhellet, $CE : RF = CD : ER$, und weil (*constr.*) $\frac{1}{2} ER \times CE = (CKq)\ LFq$, und c $LFq = RF \times FC$, so ist $CE : RF$ c 35. 3. $= FG : \frac{1}{2} ER$; folglich $CD : ER = FC : \frac{1}{2} ER$; weil nun $\frac{1}{2} ER$ die Hälfte von ER ist, so muß FC die Hälfte von CD, das ist DF muß gleich FC seyn; woraus folgt, daß $DA = AC$, und die Winkel ACB, ABC den gegebenen Unterschied haben.

Anmerkung.

So habe ich die Aufgabe aufgelöst, eh ich die vorhergehende Auflösung kannte; man wird leicht urtheilen, daß jene dieser vorzuziehen ist.

Bestimmung.

Wenn KL dem Umfang des Kreises nicht begegnet, so enthält die Aufgabe etwas unmögliches.

Dritte Auflösung. Fig. 116.

Folgende Auflösung ist wegen ihrer Kürze der nächstvorhergehenden vorzuziehen.

A B C sey, wie vorhin, das zu findende Dreyek, und MN die der Lage nach gegebene Linie.

Man mache A C F = ABC, so ist der Winkel BCF der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, mithin gegeben, folglich[a] ist der Punct F gegeben. Nun ist F A K = (A B C =) A C F, folglich ist das △ F A K dem △ F C A ähnlich, mithin ist F C : F A = F A : F K; nun ziehe man B D parallel mit C F, so ist F A : F K = A D : D B, folglich F C : F A = AD : DB, mithin ist F C X D B = F A X A D, nun sind F C, D B gegeben, folglich ist F A X A D gegeben; folglich läßt sich der Punct A finden.

a 28. dat.

Construction.

Von C ziehe man an M N die Linie C F so daß B C F gleich sey dem gegebenen Unterschied der Winkel, und aus B ziehe man B D parallel mit C F; über D F, als dem Durchmesser, beschreibe man einen Kreis. Nun suche man zwischen B D, F C eine mittlere Proportional = Linie F H, und setze sie von F senkrecht auf D F; man vereinige H, und E, den Mittelpunct des Kreises; und aus E mit E H schneide man M N

in

in A; an A ziehe man BA, CA, so wird △ ACB das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Man vereinige A, und G, wo FH den Umfang des Kreises schneidet, so ist in den △△ EAG, EHF, die Seite EA = EH, EG = EF, und der Winkel GEA = FEH; mithin ist AG = FH, und EGA = EFH, einem rechten Winkel; folglich[b] ist AG eine Tangente; mithin[c] ist (AGq) FHq = AF × AD, oder weil (*constr.*) FHq = DB × FC, so ist DB × FC = AF × AD, folglich AF : DB = FC : AD, nun ist DB : FK = DA : AF, folglich *ex æquo* AF : FK = FC : AF, mithin[d] ist △ AFE dem △ AFC ähnlich, folglich ist der Winkel FAK = FCA, nun ist FAK = ABC, folglich ist FCA = ABC, folglich haben die Winkel an der Grundlinie den gegebenen Unterschied. Q. E. D.

b 16. 3. Cor.
c 26. 3.
d 6. 6.

Aufgabe XI.

Der Scheitelwinkel BAC, der Unterschied der Seiten BA, AB, und die Verhält-

nis

nis der durchs Loth formirten Segmente BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 117.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Weil demnach das von dem gegebenen Winkel BAC gefällte Loth AD einen gegebenen Winkel mit
a 79. dat. BC macht, und BD:DC gegeben ist, so ist[a] das △ ABC der Gattung nach gegeben; mit-
b 6. dat. hin ist BA : AC gegeben, folglich[b] ist auch BA : BA — AC gegeben; nun ist BA—AC gegeben (*hyp.*) folglich auch BA; folglich ist
c 56. dat. das △ BAC auch der Größe nach gegeben[c], und alles darin ist gegeben.

Construction.

Auf eine unbegränzte Linie trage man die Linien EF, FG, die die Verhältnis der Segmente ausdrücken. Ueber EG beschreibe man einen, des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis-Abschnitt; aus F richte man ein Loth auf, das dem Umfang in A begegne, und vereinige EA, AG; auf EA trage man EP = AG, und vereinige PG; aus A auf AE trage man AQ gleich dem gegebenen Unterschied der

der Seiten; durch Q ziehe man QC parallel mit PG; und von C, wo QC die Linie AG schneidet, ziehe man CB parallel mit EG; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat den gegebenen Scheitelwinkel (*constr.*) und[d] BD : DC = EF : FG; aus eben dem Grund ist AB : AE = AQ : AP; folglich *permutando & dividendo* AB — AQ : AE — AP = AQ : AP, das ist, QB : EP = (AQ : AP =) AC : AG, nun ist (*constr.*) EP = AG, folglich QB = AC, folglich haben die Seiten den gegebenen Unterschied. Q. E. D.

d 4. 6. & 11. 5.

Berechnung.

Nach dem Lehnsatz der Aufg. V. lassen sich in dem △ AEG die Winkel an der Grundlinie finden, mithin auch die Winkel ABC, ACB; nun ist (Trig.) BA + AC : BA — AC = tang $\frac{1}{2}$ (ABC + ACB) : tang $\frac{1}{2}$ (ABC — ACB), und BA — AC ist gegeben, folglich läßt sich BA + AC finden; folglich ist jede der Seiten BA, AC gegeben; und das Dreyek ABC läßt sich berechnen.

Auf=

Aufgabe XII.

Der Scheitelwinkel B A C, das Loth A D, und der Unterschied der Segmente B D, D C, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 118.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Aus A ziehe man auf E, der Mitte von BC, die Linie AE; so ist, wie sich leicht beweisen läßt, BD — DC = 2 DE; nun ist (*hyp.*) BD — DC gegeben, folglich auch DE; und weil das Loth DA gegeben ist, so ist das △ EDA der Gattung und Größe nach gegeben, mithin ist der
79. dat. Winkel A E D gegeben, folglich [a] ist das △ ABC der Gattung nach gegeben, und der Winkel ACB ist gegeben; folglich ist das △ ADC der Gattung und Größe nach gegeben, und AC ist gegeben; aus eben dem Grund ist BA gegeben; folglich ist das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie R S nehme man ED gleich der Hälfte des gegebenen Unterterschiedes der Seiten; von D richte man DA gleich dem gegebenen Loth auf, und vereinige EA. Auf beyden Seiten von E nehme man nach Willkühr zwo gleiche Linien EF, EG, und beschreibe über FG einen des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis-Abschnitt; an H, wo er EA schneidet, von F und G ziehe man FH, GH, und von dem Punct A ziehe man AB, AC parallel mit HF, HG, bis sie der Linie RS in B und C begegnen; so wird △ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat das gegebene Loth. Ferner weil AB mit HF, und AC mit HG parallel ist, so ist[b] der Winkel BAC = FHG, das ist, dem gegebenen Scheitelwinkel. Endlich weil EH : EA = EF : EB, und EH : EA = EG : EC, so ist EF : EB = EG : EC; nun ist (*constr.*) EF = EG, mithin EB = EC, folglich ist BD — DC = 2 ED; nun ist (*constr.*) ED die Hälfte des gegebenen Unterschiedes, folglich haben die Segmente der Grundlinie den gegebenen Unterschied.

b 29. I.

Be-

Berechnung.

Nach dem Lehnsatz der Aufgabe V. lassen sich in dem △ FHG die Winkel an der Grundlinie finden; folglich sind die Winkel ABC, ACB gegeben, mithin läßt sich in dem △ ADC die Seite AC, und in dem △ ADB die Seite AB finden; folglich läßt sich das △ ABC berechnen.

Andere Auflösung. Fig 119.

Die vorhergehende Composition habe ich aus der angestellten Analysis hergeleitet: sie ist, wie man sieht, sehr simpel. Ich habe anderswo eine andere Auflösung eben dieses Problems gefunden, die ich wegen ihrer Zierlichkeit hersetzen will.

Ueber einer unbegränzten Linie RS verzeichne man, wie vorhin, das △ ADE; aus E ziehe man an RS das Loth EM; aus D ziehe man Dn, so daß der Winkel EDn gleich sey dem Ueberschuß des gegebenen, (hier stumpfen) Winkels über einen Rechten; mit Dn schneide man EA aus n in p, und vereinige pn; von A ziehe man AO parallel mit pn, und von O ziehe man OC parallel mit Dn. Aus O als dem

dem Mittelpunct mit dem Halbmesser O C beschreibe man einen Kreis, der die Linie R S in B schneide, und vereinige A C, A B; so wird das △ A B C das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil M E senkrecht ist auf R S, so ist[c] B E = E C, folglich, wie vorhin, B D — D C = 2 E D. Ferner ist klar, daß p n : O A = n D : O C, nun ist (*constr.*) p n = n D, mithin O A = O C, folglich geht der Kreis durch den Punct A. Weil nun[d] B O C = 2 (A B C + A C B), und[e] O E den Winkel B O C halbirt, so ist E O C = A B C + A C B, folglich O E C + O C E = B A C; nun ist O C E = E D n, und (*constr.*) E D n der Ueberschuß des gegebenen Winkels über einen rechten, folglich, weil O E C ein rechter Winkel ist, so muß B A C dem gegebenen Scheitelwinkel gleich seyn. Q. E. D.

c 3. 3.
d 20. 3.
e 8. 1.

Aufgabe XIII.

Der Kreis-Abschnitt A C B ist der Lage und Größe nach gegeben, den Punct C zu finden, so daß die, von den Endpuncten der geraden Linie AB an C gezogenen Linien AC, BC, die Verhältnis der gegebenen Linien M, N haben. Fig. 120.

Analysis.

Man setze, C sey der zu findende Punct, und AC, CB haben die gegebene Verhältnis; weil nun der Kreis-Abschnitt ACB der Lage
a 8. def. dat. und Größe nach gegeben ist, so ist [a] der Winkel ACB gegeben; folglich weil AC : CB gege-
b 44. dat. ben ist, so ist [b] das △ ACB der Gattung nach gegeben; mithin ist der Winkel BAC gegeben,
c 32. dat. und [c] die Linie AC ist der Lage nach gegeben;
d 28. dat. folglich [d] ist der Punct C gegeben.

Construction.

An B mache man den Winkel ABD = ACB; zu den gegebenen Linien M, N, AB, suche man die vierte Proportional-Linie, und trage sie auf BD von B nach D; man vereinige AD; an C, wo AD den Bogen schneidet, ziehe man AC, BC; so wird AC zu CB die gegebene Verhältnis haben.

Be-

Beweis.

Weil ABD = ACB (*constr.*) und CAB = CAB, so sind die △ △ ACB, ADB einander ähnlich; folglich ist AC : CB = AB : BD; nun ist (*constr.*) AB : BD = M : N, folglich ist AC : CB = M : N. Q. E. D.

Anmerkung.

Diese Aufgabe ist aus dem Pappus genommen; allein meine Auflösung ist von der seinigen verschieden. Er zieht an den zu findenden Punct C eine Tangente, die der verlängerten AB begegnet, und geräth dadurch auf eine Analysis, die weit nicht so simpel ist als die meinige.

Aufgabe XIV.

Der Unterschied der Seiten AC, AB, der Unterschied der durchs Loth formirten Segmente CD, DB, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 121.

Analysis.

A B C sey das zu findende Dreyek. Man mache D E = D B, und ziehe A E, so ist A E = A B; aus A mit A E schneide man
a 32. I. A C in F, und vereinige E F. Demnach weil [a] der Winkel A B E, das ist, A E B = C A E + A C E, so ist C A E der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, folglich gegeben; mithin ist in dem gleichschenklichten △ A F E der Winkel A F E gegeben, folglich auch sein Nebenwinkel E F C; nun ist in dem △ E F C, C D, der Unterschied der Seiten, und E C, der Unterschied der Segmente, gegeben; folglich ist das Dreyek der Gattung und Größe nach gegeben. Hieraus fließt folgende Composition.

Construction.

Man füge dem gegebenen Winkel seinen halben Nebenwinkel bey; und über E C, dem gegebenen Unterschied der Segmente, beschreibe man einen Kreis-Abschnitt E F C, der dieses Winkels fähig sey. Aus C mit C F, dem gegebenen Unterschied der Seiten, schneide man den Bogen in F, und verlängere C F; alsdann mache man den Winkel F E A = A F E; von A, wo F A, E A einander schneiden, fälle man auf die verlänglängerte CE das Loth AD, und mache DB = DE, und vereinige BA; so ist △ ABC das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Construction und der Analysis herleiten.

Berechnung.

In dem △ EFC läßt sich der Winkel C finden; folglich läßt sich in dem △ AEC AC, und AE, das ist, AB, finden, folglich läßt sich das △ ABC berechnen.

Aufgabe XV.

In ein gegebenes Dreyek ABC ein Dreyek einzuschreiben, das einem gegebenen Dreyek ähnlich (*triangulum specie datum*,) und dessen eine Seite mit der Grundlinie BC parallel sey. Fig. 122.

Analysis.

FDE sey das einzuschreibende Dreyek. Weil nun FE parallel ist mit BC, so ist der

a 43 dat. Winkel AFE (= ABC) gegeben; mithin[a] ist das △ FBD der Gattung nach gegeben, folglich ist BD : DF gegeben; nun ist, (*hyp.*)
b 9. dat. FD : DE gegeben, folglich[b] ist BD : DE gegeben; ferner weil das △ EDC der Gattung nach gegeben ist, so ist ED:DC gegeben, folglich[b] ist BD : DC gegeben; nun ist die Linie
c 8. dat. BC gegeben, folglich[c] ist BD gegeben, folglich ist der Punct D gegeben, und weil der Winkel
d 28. dat. BDF gegeben ist, so ist[d] der Punct F gegeben, und weil FE parallel ist mit BC, so ist[d] auch der Punct E gegeben; folglich ist das △ FDE nach allen Theilen bestimmt.

Construction.

An BC lege man das △ BCG an, das
e 18. 6. dem gegebenen Dreyek ähnlich seye[e], und vereinige A, G; von D, wo AG die Linie BC schneidet, ziehe man DF parallel mit BG, und DE parallel mit CG, und vereinige F, E; so ist △ FED das einzuschreibende Dreyek.

Beweis.

Weil FD, BG, und ED, CG parallel
f 29. I. sind, so ist[f] der Winkel FDE = BGC; aus
g 4. 6. eben dem Grund ist[g] FD:GB = ED:GC; folg=

folglich[h] ist das △ FDE dem △ BGC ähnlich; und weil AFD = ABG, und EFD = CBG, so ist AFE = ABC, folglich ist FE parallel mit BC. Q. E. D. h 6. 6.

Berechnung.

In dem △ BCG läßt sich BG und der Winkel CBG finden, folglich läßt sich in dem △ ABG der Winkel BAG, mithin in dem △ BAD die Seite BD finden; folglich lassen sich in den △△ BDF, DEC die Seiten DF, DE finden; und das △ FDE ist nach allen Theilen bestimmt.

Zusatz. 1. Fig. 123.

Wäre in der Aufgabe gefodert, daß FE mit AB oder AC überhaupt einen gegebenen Winkel machen soll; so würde man ACH gleich dem gegebenen Winkel machen, und in das △ AHC, wie vorhin, das △ fde einschreiben, und dann durch D die Linien DF, DE mit df, de parallel ziehen: so wird △ FDE das einzuschreibende Dreyek seyn.

Zusatz. 2. Fig. 124.

Auf eine ähnliche Art läßt sich in ein gegebenes Dreyek ein der Gattung nach gegebenes Parallelogramm einschreiben. Ich will hier nur die Figur hersetzen, weil die Verzeichnung und der Beweis sich leicht daraus abnehmen lassen. Hieraus erhellet, wie sich ein Quadrat in ein gegebenes Dreyek einschreiben läßt; eine Aufgabe, wozu Guinée in seiner Application de l' Algèbre à la Géometrie die Algebra gebraucht: die Verzeichnung, die er aus seiner Gleichung herleitet, ist bey weitem nicht so simpel, wie die meinige.

Aufgabe XVI.

In den gegebenen Quadranten ABC einen Kreis einzuschreiben, der den Bogen AB, und die beyden Halbmesser CA, CB berühre. Fig. 125.

Analysis.

EHF sey der einzuschreibende Kreis, sein Mittelpunct sey G, und die Berührungs-Puncte seyen H, F, E.

Man

Man ziehe GH, GF, so ist[a], weil ACB ein rechter Winkel ist, GHCF ein Prllgr, mithin, weil GF = GH, ein Quadrat; folglich ist BCG ein halber rechter Winkel, demnach[b] ist CG der Lage nach gegeben. Nun verlängere man CG, so wird[c] CG durch den Punct E gehen, folglich[d] ist der Punct E gegeben. Man vereinige EF, so ist in dem gleichschenklichten △ GEF der Winkel GEF = $\frac{1}{2}$ FGC, mithin gegeben; folglich[d] ist der Punct F gegeben, und weil FG der Lage nach gegeben ist, so ist[d] der Punct G gegeben; folglich[e] ist der Kreis EFH der Lage und Größe nach gegeben.

a 18. 3. & 29. 1.

b 32. dat.

c 11. 3.

d 28. dat.

e 6 def. dat.

Construction.

Man theile den rechten Winkel ACB durch CE in zween gleiche Theile, und die Hälfte ECA wiederum in zween gleiche Theile durch CD; durch den Punct E, wo CE dem Bogen AB begegnet, ziehe man EF parallel mit DC; von F ziehe man FG so daß der Winkel EFG = FEG; aus dem Punct G, wo FG die Linie CE schneidet, mit dem Halbmesser GF beschreibe man einen Kreis; so wird dieser Kreis BC, CA und BA berühren.

Beweis.

f 29. 1. Weil E F parallel ist mit D C, so ist[f] FEG = DCE, mithin CGF = ACE = GCF, folglich, weil GCF ein halber rechter ist, so ist GFC ein rechter Winkel, mit-
g 16. 8. cor. hin[g] berührt der Kreis die Linie BC in F. Ferner fälle man GH senkrecht auf AC, so ist GH = GF, mithin geht der Kreis durch H, und[g] berührt daselbst AC. Endlich weil GE = GF, so geht der Kreis durch E, und zwar wird er dem Bogen in keinem andern Punkte begegnen, sonst würde eine aus C an diesen Punct gezogene Linie gleich CE seyn, welches unge-
h 8. 3. reimt ist[h]; mithin[i] berührt er den Bogen in E.
i 3. def. 3. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ ECF ist EC, der Halbmesser des Quadranten, samt den daran liegenden Winkeln gegeben, mithin läßt sich CF finden; folglich läßt sich in dem △ GCF, GF, der Halbmesser des einzuschreibenden Kreises, finden.

Auf-

Aufgabe XVII.

Durch den Punct P, wo zween der Lage und Größe nach gegebene Kreise A, B, einander schneiden, eine der Größe nach gegebene gerade Linie zu ziehen, die dem Umfang eines jeden Kreises wiederum begegne. Fig. 126.

Analysis.

Die gegebene Linie EPF begegne dem Kreis A in E, und dem Kreis B in F. Aus den Mittelpuncten A, B ziehe man AD, BG senkrecht auf EF, so ist [a] DG $=\frac{1}{2}$ EF, mithin gegeben; von B ziehe man Bn parallel mit DG, so ist [b] Bn = DG, mithin gegeben; und weil in dem △ ABn auch die Seite AB samt dem rechten Winkel AnB gegeben ist, so ist das △ AnB der Gattung und Größe nach gegeben, und der Winkel ABn ist gegeben; folglich [c] ist Bn der Lage nach gegeben; folglich, weil der Punct P gegeben ist, so ist [d] EF der Lage nach gegeben.

a 3. 3.
b 24. 1.
c 22. dat.
d 21. dat.

Con-

Construction.

Aus B, einem der Mittelpuncte, mit der Hälfte der gegebenen Linie beschreibe man einen Kreis onm; von A, dem andern Mittelpunct, ziehe man eine Tangente an diesen Kreis, und vereinige den Berührungs = Punct n und B; durch P, wo die zween Kreise einander schneiden, ziehe man EF parallel mit Bn, so daß sie den beyden Kreisen in E und F begegne; so wird EF der gegebenen Linie gleich seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Wenn die Hälfte der gegebenen Linie größer ist, als AB, die Entfernung der Mittelpuncte; so giebt es keine Tangente wie An, und die gegebene Linie ist zu groß als daß sie durch P auf die verlangte Art könnte angelegt werden.

Uebrigens erhellt, daß, weil es von A zwo Tangenten an den Kreis giebt, man die Linie

EF

EF auch durch den Punct p, wo die Kreise einander noch einmal schneiden, anlegen kann.

Aufgabe XVIII.

Die Linie AB ist der Größe und Lage nach, eine andere EF ist der Lage nach gegeben; auf dieser letztern den Punct zu finden, wo AB dem Auge unter dem größten Winkel erscheinen muß. Fig. 127.

Erforschung und Analysis.

Man wird leicht wahrnehmen, daß sich diese Aufgabe auf folgende reduciren läßt: durch A und B einen Kreis zu beschreiben, der die Linie EF berühre; denn alsdann werden die von dem Berührungs = Punct an A und B gezogenen Linien einen größern Winkel machen, als die von irgend einem andern Punct in EF dahin gezogenen Linien. Demnach weil der Kreis durch A und B gehen soll, so wird sein Mittelpunct in einem, aus der Mitte von AB aufgerichteten Loth CE liegen[a]; er sey D, und der Berührungs = Punct G; und das Loth CE begegne der Linie EF in E. Man vereinige EB, DB, DG, GB, so ist[b] das △ DEG der Gattung nach

a I. 3.

b 43. dat.

nach gegeben, mithin ist ED:DG, oder ED: DB gegeben; nun ist der Winkel DEB gegeben, folglich[c] ist das △ DEB der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel EBD gegeben; nun ist EBC gegeben, folglich auch DBC; folglich ist das △ BCD der Gattung und Größe nach gegeben.

c 47. dat.

Construction.

Von E, wo das aus der Mitte C aufgerichtete Loth der Linie EF begegnet, an B ziehe man EB. Von C ziehe man CH senkrecht auf EF, und aus eben dem Punct schneide man mit CH die verlängerte EA in I; alsdann ziehe man BD parallel mit CI, und aus D, wo BD das Loth schneidet, DG parallel mit CH; so wird der aus D mit DG beschriebene Kreis durch A und B gehen, und EF in G berühren; oder das Auge muß sich in G befinden, um die Linie AB unter dem größten Winkel zu sehen.

Beweis.

Es erhellet, daß DB:CI = DG:CH, nun ist (*constr.*) CI = CH, mithin DB = DG; ferner ist DA = DB, folglich wird der Kreis durch B und A gehen, und[d] er berührt

d 16. 3. cor.

rührt EF in G. Daß aber AGB der größte Winkel ist, wird man leicht wahrnehmen, wenn man von irgend einem andern Punct in EF Linien an A, B zieht; denn der Winkel im Kreis-Abschitt, der dem Winkel AGB gleich ist, wird immer der äussere Winkel, folglich größer seyn als der innere entgegengesezte. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ ECB läßt sich EC, mithin in dem △ FCH die Seite CH finden; nun ist CH = CI, folglich läßt sich in dem △ ECI der Winkel CIE finden; nun ist CIE = DBE, folglich ist DBE gegeben, mithin weil CBE gegeben ist, so läßt sich CBD finden; folglich läßt sich das △ DCB berechnen, und DB = DG ist gegeben.

Anmerkung.

Die gegebenen Dinge können zufälligerweise so beschaffen seyn, daß die Linie AG durch den Mittelpunct D geht, wie in der Figur.

Auf-

Aufgabe XIX.

Die Linien AM, AN sind der Lage nach gegeben, und der Punct P in ihrem Zwischenraum ist gegeben; einen Kreis zu beschreiben, der durch den Punct P gehe, und die beyden Linien berühre. Fig. 128.

Analysis.

Der Mittelpunct des zu findenden Kreises sey E; die Berührungs-Puncte F, G; der Punct, wo die Linien zusammenstoßen, A.

Man vereinige AE, EF, EG, EP, AP; so erhellt, daß in den △△ FAE, GAE die Winkel FAE, GAE einander gleich sind; nun ist wegen der gegebenen Lage der Linien AM, AN, der Winkel FAG gegeben, folglich auch
43. dat. seine Hälfte FAE; mithin [a] ist △ AFE der Gattung nach gegeben; folglich ist AE : EF, das ist, AE : EP gegeben; und weil der Win-
b 47. dat. kel EAP gegeben ist, so ist [b] △ AEP der Gat-
c 28. dat. tung nach gegeben; folglich [c] ist der Punct E samt der Linie PE gegeben.

Con-

Construction.

Man halbire den Winkel MAN durch AH, und vereinige AP. Von einem willkührlichen Punct C der Linie AH ziehe man CB senkrecht auf AM, und aus C mit CB schneide man AP in D; durch P ziehe man PE parallel mit DC; so wird der, aus E mit EP beschriebene Kreis die beyden Linien AM, AN berühren.

Beweis.

Man ziehe EF parallel mit CB, so ist BC : FE = CD : EP, nun ist (*constr.*) BC = CD, mithin FE = EP, mithin geht der Kreis durch F, und weil EF senkrecht ist[e] auf AM, so berührt[f] AM den Kreis. Gleicherweise, wenn man EG senkrecht auf AN zieht, so ist EG = EF, und AN berührt den Kreis. Q. E. D.

e 29. I.
f 16. 3. cor.

Berechnung.

In dem △ ABC, wenn man AC als gegeben annimmt, läßt sich BC finden; folglich läßt sich in dem △ ADC der Winkel ADC finden, mithin auch der ihm gleiche APE;

folglich läßt sich in dem △ APE die Seite PE, das ist, der Halbmesser des gesuchten Kreises finden.

Bestimmung.

Weil der aus C mit CB beschriebene Kreis die Linie AP immer in zween Puncten schneidet, so giebt es zween Kreise, die der Aufgabe genug thun; wenn nämlich der Punct P zwischen AM (oder AN) und der halbirenden Linie liegt. Liegt aber P auf der halbirenden Linie, so giebt es nur Einen Kreis: die Analysis in diesem Fall ist nicht schwehr zu finden.

Aufgabe XX.

Die Linien AM, AN sind der Lage nach gegeben, und der Punct E in ihrem Zwischenraum ist gegeben; durch diesen Punct eine Linie zu ziehen, die den Linien AM, AN begegne, und ein Dreyek beschließe, das einer gegebenen Fläche gleich sey. Fig. 129.

Analysis.

Der zu findende Punct sey C, und die, durch C und E gezogene Linie CEG beschließe

das

das Dreyek GAC, das der gegebenen Fläche gleich sey. Durch den Punct E ziehe man EF parallel mit AN, und über der gegebenen AF unter dem gegebenen Winkel MAN mache man [a] ein Parallelogramm AD, das der gegebenen Fläche gleich sey; nun erhellt offenbar aus der Figur, daß die beyden △△ FGE, HBC zusammengenommen dem △ EHD gleich seyn müßen; nun sind alle diese Dreyecke einander ähnlich, folglich [b] △ FGE : △ HBC = FEq : BCq, mithin *componendo* △ FGE + △ HBC ; △ HBC = FEq + BCq : BCq; ferner ist △ HBC : △ EDH = BCq : EDq, folglich *ex æquo* △ FGE + HBC : △ EDH = FEq + BCq : EDq, weil nun △ FGE + HBC = △ EDH, so ist FEq + BCq = EDq; nun ist FE, wie auch ED gegeben, folglich ist BC gegeben; und weil der Punct B gegeben ist, so ist auch C gegeben, und die Linie CEG ist der Lage und Größe nach gegeben.

a 45. 1.

b 19. 6.

Construction.

Nachdem man [a] das Prllgr AFDB beschrieben hat, so ziehe man aus B die Linie BI senkrecht auf AN, und gleich FE; von I mit ED schneide man AN in C; durch C und den gegebenen Punct E ziehe man CEG; so wird das $\triangle$ AGC gleich seyn dem Prllgr AFDB, das ist, der gegebenen Fläche.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Wenn $FE = ED$, so fällt der Punct C auf B; ist aber $FE > ED$, so erreicht IC die Linie AN nicht, und man hat ungereimte Dinge gegeben.

Berechnung.

Das Loth von E auf AN ist gegeben, mithin läßt sich, wegen der gegebenen Fläche des Prllgr, die Grundlinie AB finden; nun ist $BC = \sqrt{ED^2 - FE^2}$, mithin läßt sich BC berechnen.

Algebraische Analysis.

Ich will eben diese Aufgabe algebraisch auflösen, um durch ein Beyspiel zu zeigen, wie sehr

sehr die geometrischen Analysen den algebraischen vorzuziehen sind.

Man fälle von den Puncten F, G die Lothe FK, GL auf die Grundlinie herab, und setze, wie vorhin, FE parallel mit AC. Demnach ist $AF : FK = AG : GL$, und $GF : FE = AG : AC$, folglich $AF \times GF : FK \times FE = AG^2 : GL \times AC$; nun sey $AF = a$, $GF = x$, $FK = b$, $FE = c$, $AG = a + x$, und die gegebene Fläche $GL \times AC = bp$; folglich $ax : bc = (a + x)^2 : bp$, hieraus folgt $x^2 + \left(\frac{2ac - ap}{c}\right) x + a^2 = o$, und wenn man, um den Calcul zu erleichtern, $\frac{2ac - ap}{c} = -2ar$ setzt, so erhält man $x - ar = \pm a \sqrt{r^2 - 1}$, folglich ist $x = a\left(r \pm \sqrt{r^2 - 1}\right)$. Es giebt vielleicht eine simplere Art, diese Aufgabe algebraisch aufzulösen; aber schwerlich wird man durch algebraische Kunstgriffe eine so kurze und zierliche Verzeichnung der Figur erhalten, wie die, die uns die geometrische Analysis an die Hand gegeben hat.

Aufgabe XXI.

Die durchs Loth formirten Segmente der Grundlinie AC, CB, und die Summe der Seiten AH + HB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 130.

Analysis.

AHB sey das zu findende Dreyek. Aus H, dem Scheitelpunct, mit HB beschreibe man einen Kreis, der AB in D, und AH in K schneide, und verlängere AH, bis sie dem Umfang in L begegne; so ist* AD × AB = AK × AL; nun sind AD, AB, AL (= AH + HB) gegeben, mithin ist AK gegeben, folglich ist KL, der Durchmesser des Kreises, wei auch HB, der Halbmesser, gegeben; folglich ist in dem Loth CI der Punct H gegeben, und das △ AHB läßt sich finden.

* 36. 3. cor.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man die Segmente AC, CB; von A ziehe man unter einem willkührlichen Winkel die Linie AE gleich der gegebenen Summe der Seiten, und ver-

vereinige EB; man nehme CD = CB, und mache den Winkel ADG = AEB; mit GF der Hälfte von GE, aus B schneide man das Loth CI in H, und vereinige AH, HB; so ist △ AHB das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Weil die △△ ADG, ABE einander ähnlich sind, so ist AD : AG = AE : AB, folglich AD × AB = AG × AE. Nun beschreibe man aus H mit HB einen Kreis, der AH in K schneide; er wird, weil CD = CB ist, AB in D schneiden; demnach, wenn man AH bis L verlängert, so ist[a] AD × AB = AK × AL, folglich AK × AL = AG × AE, oder[b] AFq — GFq = AHq — (HLq) HBq; nun ist (*constr.*) GF = HB, folglich ist AF = AH, mithin AH + HB = AE, der gegebenen Summe der Seiten. Q. E. D. b 6. 2.

Berechnung.

Weil AE : AB = AD : AG, so läßt sich AG finden, mithin auch GE, und $\frac{1}{2}$ GE = GF = HB, folglich ist HB gegeben, mithin läßt sich AH finden, und das $\triangle$ AHB läßt sich berechnen.

Algebraische Auflösung.

Man setze $AC = a$, $CB = b$, $AH + HB = c$, $AH = x$, folglich $HB = c - x$; so erhält man wegen der rechtwinklichten $\triangle\triangle$ AHC, CBH, $x^2 - a^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$, folglich $x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2c}$. Hieraus ließe sich auch eine zimlich einfache Verzeichnung herleiten, die aber nicht so zierlich seyn würde, wie die, die wir aus der geometrischen Analysis hergeleitet haben.

Aufgabe XXII.

EFG ist ein der Lage und Größe nach gegebener Kreis; AD, eine darin liegende gerade Linie, die durch den Mittelpunct B geht, auch der Größe und Lage nach gegeben: auf dem Umfang des Kreises den Punct zu finden, wo AD dem Auge unter dem größten Winkel erscheinen muß. Fig. 131.

Er-

Erforschung und Analysis.

Man wird leicht wahrnehmen, daß die Aufgabe sich auf folgende reduciren läßt: einen Kreis zu beschreiben, der durch A und D gehe, und den gegebenen Kreis berühre; denn alsdann werden die, von dem Berührungs-Punct an A und D gezogenen Linien einen größern Winkel machen, als die, von irgend einem andern Punct des Umfanges dahin gezogenen Linien. Dieser Kreis nun sey EAD; sein Mittelpunct, der gewiß[a] auf dem, aus der Mitte von AD aufgerichteten Loth CI liegen wird, sey H; der Berührungs-Punct E; so wird[b] die durch B und H gezogene Linie durch den Berührungs-Punct E gehen. Man vereinige AH, so ist AH + HB = EB; nun ist EB der Halbmesser des gegebenen Kreises, mithin gegeben; folglich ist in dem △ ABH die Summe der Seiten AH + HB gegeben; folglich, weil die durchs Loth formirten Segmente AC, CB auch gegeben sind, so läßt sich, nach der vorhergehenden Aufgabe, der Punct H finden, und[c] der Kreis EAD ist der Lage und Größe nach gegeben.

a I. 3.
b II. 3.
c 6. def. dat.

Construction.

Ueber der Grundlinie AB, die aus den gegebenen Segmenten AC, CB zusammengesezt ist, beschreibe man, nach der vorhergehenden Aufgabe, ein Dreyek, dessen Seiten AH, HB zusammen dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich seyn. Aus dem Scheitelpunct H mit HA beschreibe man einen Kreis; dieser Kreis wird durch D gehen, und den gegebenen Kreis berühren.

Beweis.

Weil CD = AC (*constr.*) so ist HD = HA, mithin geht der Kreis durch D. Nun verlängere man die, durch die zween Mittelpuncte B, H gezogene BH, bis sie dem Umfang des eingeschriebnen Kreises in E begegne; so ist EH = AH, folglich BE = BH + AH, nun ist (*constr.*) BH + AH = dem Halbmesser des gegebenen Kreises, folglich auch BE, das ist, der Punct E ist beyden Kreisen gemein; und zwar haben die Kreise keinen andern Punct gemein, sonst würden die, von B und H an diesen Punct gezogenen Linien ein Dreyek begränzen, wo die Summe zweyer Seiten der dritten

Sei-

Seite gleich wäre: folglich[d] berühren die zween Kreise einander in E. Q. E. D. d 3. def. 3.

Aufgabe XXIII.

Die Hypothenuse A B, und die Fläche eines rechtwinklichten Dreyeks sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 132.

Analysis.

A B C seyn das zu findende Dreyek. Aus D, der Mitte der Hypothenuse B C, mit D C beschreibe man einen Kreis; er wird durch den Scheitelpunct A gehen[a]. Durch A ziehe man eine Parallel-Linie mit B C, und beschreibe über D C das Rechtek E D C F; es wird[b] dem △ A B C gleich, mithin gegeben seyn; nun ist D C gegeben, folglich[c] ist die andere Seite D E gegeben, und weil D E der Lage nach gegeben ist, so ist der Punct E gegeben, folglich weil E F parallel ist mit B C, so ist[d] E F der Lage nach gegeben, folglich[e] weil der Kreis der Lage nach gegeben ist, so ist der Punct A gegeben, und das △ B A C ist gegeben.

a 31. 3. cor.
b 41. 1.
c 61. dat.
d 37. dat.
e 28. dat.

Con-

Construction.

Ueber der gegebenen Hypothenuse BC beschreibe man einen Kreis; über DC, der Hälfte
f 45. I. von BC, beschreibe man [f] das Rechtek DCFE, das der gegebenen Fläche gleich sey; an A, wo EF den Umfang des Kreises schneidet, von B und C ziehe man BA, CA; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Ist ED größer als DC, der Halbmesser des Kreises, so giebt es keinen Durchschnitts-Punct wie A, und die Aufgabe enthält etwas unmögliches.

Algebraische Auflösung.

Die gegebene Fläche sey a^2, $BC = b$, $AB = x$, $AC = y$, so ist $a^2 = \frac{xy}{2}$, oder $4a^2 = 2xy$, und $b^2 = x^2 + y^2$;

die-

diese zwo Gleichungen addire man, so bekommt man $x^2 + 2xy + y^2 = b^2 + 4a^2$, folglich $x + y = \sqrt{b^2 + 4a^2}$; und wenn man sie abzieht, $x^2 - 2xy + y^2 = b^2 - 4a^2$, folglich $x - y = \sqrt{b^2 - 4a^2}$; folgl. ist $x = \frac{\sqrt{b^2+4a^2} + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$, und $y = \frac{\sqrt{b^2+4a^2} - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$.

Aufgabe XXIV.

Die Grundlinie BC, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, und die, von dem Scheitelpunct auf die Mitte von BC gezogene Linie AD, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 133.

Algebraische Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Auf AB nehme man AE = AC, und vereinige EC, so ist BCE gleich dem doppelten Unterschied der Winkel an der Grundlinie, folglich gegeben. Von B ziehe man BF senkrecht auf die verlängerte CE, und von A fälle man auf EC

das

das Loth AG herab: so sind die $\triangle\triangle$ BFE, EAG einander ähnlich, folglich FE : BE = EG : EA; nun heiße man BF = a, FC = b, FE = x, so ist EC = b — x, $EG = \frac{b-x}{2}$, $BE = \sqrt{a^2 + x^2}$, folglich $x : \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{b-x}{2} : EA$, mithin ist $EA = \frac{b-x}{2x} \sqrt{a^2 + x^2}$, und (EA + EB), das ist, $AB = \frac{b-x}{2x} \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{b+x}{2x} \sqrt{a^2 + x^2}$. Nun mache man von folgendem Satze Gebrauch: wenn man von dem Scheitelpunct eines Dreyeks auf die Mitte der Grundlinie eine gerade Linie zieht, so ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe des doppelten Quadrates der gezogenen Linie, und des doppelten Quadrates der Hälfte der Grundlinie; oder ABq + ACq = 2ADq + 2BDq. Man setze, um die Rechnung zu erleichtern, 2ADq + 2BDq = $2c^2$, so wird man, weil AC = AE, die Gleichung erhalten, $\frac{(b+x)^2 . (a^2+x^2)}{4x^2} + \frac{(b-x)^2 . (a^2+x^2)}{4x^2} = 2c^2$; diese Gleichung aufgelöst giebt $x4 + (a^2 + b^2 —$

4c²

$4c^2) x^2 = - a^2 b^2$; nun setze man $a^2 + b^2 - 4c^2 = - 2p^2$, so ist $x^4 - 2p^2x^2 + p^4 = p^4 - a^2b^2$, folglich $x^2 - p^2 = \sqrt{p^4 - a^2b^2}$, folglich $x = \sqrt{(p^2 + \sqrt{p^4 - a^2b^2})}$.

So habe ich das Problem aufgelöst, nachdem ich eine geometrische Analyse vergebens gesucht hatte. Nachher habe ich in Simsons Schriften eine geometrische Auflösung davon gefunden, die ich wegen ihrer Zierlichkeit hersetzen will. Fig. 134.

Ueber AB, der gegebenen Grundlinie, beschreibe man den Kreis-Abschnitt AHEB, der des gegebenen Unterschiedes der Winkel an der Grundlinie fähig sey. Man theile AB in zween gleiche Theile in C, und suche, wenn KL die gegebene, vom Scheitelpunct auf die Mitte der Grundlinie gezogene Linie ist, zu KLq, ACq AC die vierte Proportional-Linie, (*) und trage sie auf AB von C nach D; alsdann ziehe man

(*) Man verwandle nämlich[a] das Quadrat KLq in ein Rechtek, das zur Grundlinie AC habe; seine Höhe alsdann sey P, so ist[b] AC × P : ACq = P : AC; folglich darf man nur zu P, AC die dritte Proportional-Linie suchen. a 45. I. b I. 6.

man CS, DI senkrecht auf AB, bis sie dem Umfang des Kreises in S und I begegnen, und vereinige AI; durch G, wo AI die Linie CS schneidet, ziehe man EGH parallel mit AB, und vereinige AE, AH; auf AI nehme man AN = KL, und ziehe durch N die Linie MNP parallel mit EH; sie begegne AE, AH in M und P; so ist △ AMP das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Weil (*constr.*) CG parallel ist mit DI,
c 4. 6. und KLq:ACq = AC:CD, so ist[c] KLq:
d 1. 6. ACq = AG:GI = AGq : AG×GI[d];
e 35. 3. nun ist[e] AG × GI = EG × GH, das ist, weil EH mit AB parallel, und CG senkrecht auf BA ist, = EGq, folglich KLq : ACq = AGq : EGq, mithin KL : AC = (AG:EG =) AN : NM; nun ist (*constr.*) AN = KL, folglich NM = AC; nun ist, weil EH = 2EG, auch MP = 2MN, folglich ist MP = AB, mithin hat das Dreyek die gegebene Grundlinie, und AN = KL begegnet MP in der Mitte N. Endlich ist wegen der gleichen Bogen BE, AH, der Unterschied der Winkel AHE — AEH, das ist, APM — AMP = AEB, dem gegebenen Unterschied der Winkel an der Grundlinie. Q. E. D.

Auf-

Aufgabe XXV.

Die Grundlinie AB, das Loth HP, und die Summe der beyden Seiten MN, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 135.

Analysis.

AHB sey das zu findende Dreyek, und $AH + HB = MN$, oder $MN - AH = HB$; folglich $MNq - 2MN \times AH + AHq = HBq$, mithin $MNq - 2MN \times AH = HBq - AHq$; nun ist $HBq - AHq = PBq - APq = AB \times (PB - AP)$; und wenn man AB in C in zween gleiche Theile theilt, so ist $PB - AP = 2PC$, folglich ist $MNq - 2MN \times AH = 2AB \times PC$, oder $MNq = 2MN \times AH + 2AB \times PC$; nun setze man anstatt des Rechteckes $2MN \times AH$ ein anderes, das 2AB zur Grundlinie, und irgend eine andere Linie zur Höhe habe; diese Höhe sey PD, so ist $MNq = 2AB \times DC$; auf diese Art hat man anstatt zweyer Rechtecke ein einziges Rechtek bekommen, und die Linie CD, als die dritte Proportional-Linie von 2AB, MN, läßt sich finden, und weil der Punct C gegeben ist, so ist auch der Punct D gegeben.

Nun richte man von D ein unbegränztes Loth auf, und ziehe durch den Scheitelpunct H die Linie E F parallel mit A B, und gleich M N, und vereinige E A; von F ziehe man auf die verlängerte E A die Linie F G parallel mit A H, so ist $EF : FG = EH : AH$ oder $MN : FG = PD : AH$, folglich $MN \times AH = FG \times PD$; nun haben wir oben $MN \times AH = AB \times PD$ gesezt, folglich muß $FG = AB$ seyn. Nun ist, weil E F der Lage und Größe nach gegeben ist, der Punct F gegeben, folglich weil E A der Lage nach gegeben ist, so ist der Punct G gegeben, folglich, weil A H parallel ist mit F G, so ist der Punct H gegeben, und das Dreyek läßt sich finden.

Construction.

Man theile die gegebene Grundlinie A B in zween gleiche Theile in C, und suche zu 2 A B, M N die dritte Proportional=Linie, die man auf der verlängerten B A von C nach D trage; aus D richte man D E, gleich dem gegebenen Loth, senkrecht über D B auf, und ziehe durch E die Linie E F parallel mit D B und gleich M N; aus F mit A B schneide man die verlängerte E A in G; durch A ziehe man A H parallel mit F G, und vereinige H B; so wird $\triangle$ A H B das gesuchte Dreyek seyn.

Be=

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis herleiten.

Berechnung.

Weil 2 AB : MN = MN : CD, so ist CD gegeben, mithin auch AD; nun ist ED gegeben, folglich läßt sich in dem △ EDA der Winkel DAE finden, mithin ist der Winkel AEH gegeben; nun ist EF = MN, FG = AB, mithin gegeben, folglich läßt sich in dem △ EFG der Winkel F finden, folglich ist der ihm gleiche HAP gegeben; mithin ist wegen des gegebenen Lothes HP in dem △ HAP die Seite AH gegeben, folglich läßt sich auch die andere Seite HB finden, und das △ AHB läßt sich berechnen.

Bestimmung.

Wenn AB kleiner ist als ein von F auf die verlängerte EA gefälltes Loth, so enthält die Aufgabe etwas unmögliches.

Algebraische Auflösung.

Man heiße $AH + HB = a$, $AB = b$, $HP = c$, $AH = x$, $AP = y$; mithin
a 13. 2. $HB = a - x$, $PB = b - y$; nun ist[a] $ABq + AHq = HBq + 2 AB \times AP$, das ist $b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + 2by$, mithin $b^2 - a^2 + 2ax = 2by$, oder, wenn man $b^2 - a^2 = -2p^2$ sezt, $ax - p^2 = by$; nun ist $APq = AHq - HPq$, das ist $y^2 = x^2 - c^2$, folglich $a^2x^2 - 2ap^2x + p^4 = b^2x^2 - b^2c^2$, folglich $x^2 - ax = -\frac{p^4 + b^2c^2}{2p}$; nun setze man, um die Rechnung zu verkürzen, diesen leztern Ausdruk $= \frac{aq}{4}$, so ist $x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{a - q})$.

Aufgabe XXVI.

Die Grundlinie AB eines rechtwinklichten Dreyeks ist gegeben, und das Rechtek seiner Seiten ist gleich dem Quadrate des Unterschiedes derselben; das Dreyek zu finden. Fig. 136.

Ana-

Analysis.

ACB sey das zu findende Dreyek. Demnach weil (*hyp.*) $AC \times CB = (AC - CB)q$, so ist $AC \times CB = ACq - 2AC \times CB + CBq$; folglich ist $3AC \times CB = ACq + CBq = ABq$; mithin ist $3AC : AB = AB : CB$, nun ist[a] wenn man von dem rechten Winkel ACB auf AB das Loth CX herabfällt, $AB : AC = CB : CX$, folglich *ex æquo*, $3AC : AC = AB : CX$, folglich ist $CX = \frac{1}{3} AB$. a 8. 6.

Construction.

Ueber der gegebenen Grundlinie AB beschreibe man einen Kreis; von B richte man auf AB ein Loth BD auf, das dem dritten Theil von AB gleich sey; durch D ziehe man mit AB eine Parallel-Linie, die dem Kreis in C begegne: so wird, wenn man AC, CB vereiniget, das △ ACB das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Berechnung.

Von dem Mittelpunct des Kreises E ziehe man ED, EC; so sind in dem △ EDB die Seiten EB, BD samt dem rechten Winkel gegeben, folglich läßt sich ED und der Winkel DEB finden; nun ist CDE = DEB, und CE = EB, folglich läßt sich in dem △ CED die Seite CD finden; mithin ist XB gegeben; folglich lassen sich die Seiten CB, CA finden, und das Dreyek ACB läßt sich berechnen.

Aufgabe XXVII.

Die zween Puncte A, B auf dem Umfang des gegebenen Kreises O sind gegeben; den Durchmesser so zu ziehen, daß, wenn man von A, B auf denselben Lothe herabfällt, das zwischen den Endpuncten liegende Segment gleich sey einer gegebenen geraden Linie. Fig. 137.

Analysis.

DOE sey der zu findende Durchmesser, und das, zwischen den Lothen AX, BY liegende Segmente XY sey einer gegebenen geraden Linie

Linie gleich. Man vereinige AB, und ziehe AC parallel mit DE, so ist[a] AY ein Parallelogramm, mithin AC = XY, folglich ist AC gegeben; nun ist AB samt dem rechten Winkel ACB gegeben, folglich ist das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben, und der Punct C ist gegeben; folglich ist BY der Lage nach gegeben; nun ist der Punct O gegeben, und OYB ist ein rechter Winkel, mithin[b] ist OY der Lage nach gegeben, folglich ist der Durchmesser DE der Lage nach gegeben.

a 29. I.

b 33. dat.

Construction.

Man vereinige AB. Aus A mit der gegebenen Linie beschreibe man einen Kreis, an den man[c] von B eine Tangente BC ziehe. Von O, dem Mittelpunct des gegebenen Kreises, ziehe man OY senkrecht auf die verlängerte BC, und verlängere OY, bis sie dem Umfang auf beyden Seiten begegne. Von A fälle man auf DE das Loth AX herab, so wird XY = AC, das ist, der gegebenen Linie gleich seyn.

c 17. 3.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmnng.

Weil es von B an den beschriebenen Kreis zwo Tangenten giebt, so giebt es zween Halbmesser, die der Aufgabe genug thun; und es erhellt, daß weil in dem rechtwinklichten △ ABC, AB grösser ist als AC, die gegebene Linie nicht grösser seyn darf als AB. Sie kann gleich seyn AB, alsdann ist der zu ziehende Durchmesser parallel mit AB.

Berechnung.

In dem △ ACB läßt sich der Winkel ABC finden; nun vereinige man AO, OB, so läßt sich in dem △ AOB der Winkel ABO finden, folglich ist der Winkel OBY gegeben; mithin läßt sich in dem △ OBY die Seite OY finden, und alles übrige läßt sich berechnen.

Aufgabe XXVIII.

Die drey Puncte A, B, C auf dem Umfang des gegebenen Kreises O sind gegeben; auf der Fläche des Kreises der Punct zu finden, so daß die, von diesen drey Puncten dahin

hin gezogenen Linien zween gegebene Winkel machen. Fig. 138.

Analysis.

Der zu findende Punct sey X. Man vereinige AB, BC, AX, BX, CX; so liegt, weil AB und der Winkel AXB gegeben ist, der Punct X auf dem Umfang eines gegebenen Kreises (Aufg. 1.). Gleicherweise, weil BC, und der Winkel BXC gegeben ist, liegt X auf dem Umfang eines andern gegebenen Kreises: folglich ist X der Durchschnitts-Punct zweyer der Größe und Lage nach gegebenen Kreise, mithin [a] gegeben. Hieraus läßt sich die Composition leicht herleiten. a 28. dat.

Aufgabe XXIX.

Die zwo Linien AM, AN sind der Lage nach, und der Kreis C ist der Lage und Größe nach gegeben; einen Kreis zu finden, der die beyden Linien und den gegebenen Kreis berühre. Fig. 139.

Erforschung und Analysis.

Der zu findende Kreis sey OKD, sein Mittelpunct B, die Berührungs-Puncte O, K, D. Man vereinige BO, BD, BA, so sind die △△ AOB, BDA einander vollkommen
a 18. 3. gleich [a], mithin ist der Winkel OAB = BAD, folglich ist die Lage der Linie AB gegeben, und man ist versichert, daß der Mittelpunct des zu findenden Kreises auf der, den gegebenen
b 11. 3. Winkel MAN halbirenden Linie AR liegt. Nun vereinige man die Mittelpuncte B, C, so wird [b] BC verlängert durch K gehen; mithin ist BK = BD. Nun nehme man BE = BC, so ist ED = CK, mithin gegeben; nun ziehe man durch den Punct E die Linie EP parallel mit AN, bis sie AR in P begegne, so ist BP : BE = PA : ED; nun ist das △ BPE dem
c 43. drt. △ BAD ähnlich, folglich [c] der Gattung nach gegeben, mithin ist die Verhältnis BP : BE gegeben; folglich ist auch PA : ED gegeben; nun ist ED gegeben, folglich ist AP gegeben,
d 29. dat. & 31. dat. folglich ist der Punct P gegeben, folglich [d] sind die Linien PC, PE der Lage nach gegeben. Nun ziehe man von einem willkührlich-angenommenen Punct H auf der Linie AR die Linien HG, HI parallel mit BE, BC, so ist HG : BE = HI : BC; nun ist BE = BC, folglich

HG

HG = HI, nun ist HG senkrecht auf PE, mithin gegeben, folglich[e] ist HI der Lage und Größe nach gegeben, mithin[d] ist CB der Lage nach gegeben, und[f] der Punct B, wie auch BD ist gegeben, folglich ist der zu findende Kreis der Lage und Größe nach gegeben.

e 34. dat.

f 28. dat.

Construction.

Man halbire den gegebenen Winkel MAN durch die Linie AR. Von einem auf AR will-führlich-angenommenen Punct H fälle man auf AN das Loth HF, und nehme FG = CK, dem Halbmesser des gegebenen Kreises; durch G ziehe man eine Parallel-Linie mit AN, die der Linie AR in P begegne. Nun vereinige man P, C, und aus H mit der gegebenen GH schneide man PC in I; durch C ziehe man CB parallel mit IH, bis sie AR in B begegne; von B fälle man BD senkrecht auf AN: so wird der aus B mit BD beschriebene Kreis die beyden Linien, und den gegebenen Kreis berühren.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Berechnung.

Wenn man AC vereiniget, und von C auf AM ein Loth zieht, so läßt sich, weil AC und dieses Loth gegeben sind, der Winkel MAC finden; folglich ist der Winkel CAP gegeben; nun ist, wie aus der Analysis erhellet, AP gegeben, folglich läßt sich PC und der Winkel APC finden, mithin auch der Winkel CPB. Nun ist PH willkührlich angenommen worden, mithin gegeben, folglich läßt sich in dem △ PHG, dessen Winkel gegeben sind, HG finden; nun ist HI = HG, folglich läßt sich in dem △ PHI PI finden; folglich, weil PI : PH = PC : PB, so ist PB gegeben; mithin läßt sich in dem △ PBE die Seite BE finden, folglich, weil DE dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich ist, so ist BD, der Halbmesser des gesuchten Kreises, gegeben.

Bestimmung.

Wenn der aus H mit HG beschriebene Kreis die Linie PC in zween Puncten schneidet, so giebt es auf dieser Seite zween Kreise, die der Aufgabe genug thun.

Auf=

Aufgabe XXX.

Die Fläche eines rechtwinklichten Dreyeks, und die Summe der, den rechten Winkel einschließenden Seiten, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 140.

Analysis.

AFG sey das zu findende Dreyek, AF + FG die Summe seiner Seiten, seine Fläche gleich dem Quadrat der Linie PQ. Man verlängere AF so daß FB = FG. Ueber AB beschreibe man aus der Mitte C einen Kreis, und verlängere GF bis sie dem Umfang desselben in E begegne; so ist EF auf AB senkrecht, folglich[a] AF × FB = EFq, nun ist (*hyp.*) △ AFG, das ist, $\frac{1}{2}$ AF × FG = PQq, folglich $\frac{1}{2}$ EFq = PQq, oder EFq = 2PQq, mithin ist die Linie EF der Größe nach gegeben, und weil AB, die Summe der Seiten, gegeben ist, so ist die Hälfte AC, der Halbmesser des Kreises, mithin auch CE gegeben: folglich ist in dem rechtwinklichten △ CEF die Seite CF gegeben: nun ist der Punct C gegeben, mithin auch der Punct F. Woraus erhellt, daß das △ AFG gegeben ist. a 35. 3.

Con-

Construction.

Ueber A B, der gegebenen Summe der Seiten, beschreibe man den Kreis A F B. Aus dem Mittelpunct C unter einem halben rechten Winkel ziehe man $CD = 2PQ$; durch D ziehe man DE parallel mit A B, bis sie dem Umfang in E begegne; von E fälle man auf A B das Loth E F herab, und verlängere E F, so daß $FG = FB$ sey; dann vereinige man A G, so ist △ A F G das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Von E fälle man auf A B das Loth D H herab, so ist, weil (*constr.*) D C H ein halber rechter Winkel ist, auch C D H ein halber rechter, folglich $DH = HC$; mithin $CDq = 2DHq$, nun ist (*constr.*) $CD = 2PQ$, mithin $4PQq = 2DHq$, das ist, $2PQq = DHq$; nun ist $DH = EF$, und a $EFq = AF \times FB = AF \times FG$, folglich $2PQq = AF \times FG$, oder $PQq = \frac{1}{2} AF \times FG$. Q. E. D.

Berechnung.

In dem $\triangle$ CEF ist CE $= \frac{1}{2}$ AB gegeben, und EFq $=$ 2PQq gleicherweise gegeben, folglich ist CF gegeben, mithin ist AF, wie auch FB $=$ FG gegeben, und das $\triangle$ AFG läßt sich berechnen.

Ende der Aufgaben.

Anhang.

Da der Zwek dieses Werkchens ist zu weisen, wie man durch die Elementar-Geometrie Dinge bewerkstelligen kann, wozu man bisweilen die Algebra gebraucht; so wird es nicht undienlich seyn, hier den Beweis eines Lehrsatzes beyzufügen, der sich in den Fluxionen des Mac-Laurin Nro. 623. befindet, den aber Mylord Stanhope durch die Elementar-Geometrie bewiesen hat. Es ist ein besonderer Fall des 45sten Satzes des vortreflichen Tractates, den Robert Simson von den Kegelschnitten geschrieben hat.

Lehrsatz.

Wenn man auf dem Umfang eines Kreises sechs Puncte nach Willkühr annimmt, und die gezogenen Sehnen, je zwey und zwey, die einander gegenüber liegen, verlängert, bis sie zusammenstoßen; so werden die drey Puncte,

wo

wo die verlängerten Sehnen, je zwey und zwey, zusammenstoßen, in einer geraden Linie liegen.

Man nehme auf dem Umfang des Kreises ABC nach Willkühr die sechs Puncte A, B, C, D, E, F an, und ziehe die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FA; dann verlängere man die einander gegenüber liegenden Sehnen AB und ED, BC und FE, CD und AF, bis sie in den Puncten G, H, I zusammenstoßen: so werden diese drey Puncte in einer geraden Linie liegen.

Vorbereitung zum Beweis.

Durch den Punct F ziehe man FL parallel mit CD, bis sie dem Umfang in L begegne; alsdann ziehe man durch die Puncte L und B eine Linie, die der GE in N begegne. Gleicherweise ziehe man durch den Punct B, BK parallel mit DE, bis sie dem Umfang in K begegne; alsdann ziehe man KF, die der CI in M begegne.

Endlich vereinige man HN, HM, BE, CF, BD, DF.

Beweis.

Weil CD, LF parallel sind, so sind die Bogen CBL, DEF einander gleich, folglich sind die Winkel CBL, DEF einander gleich. Hieraus folgt, daß die Winkel NBH, NEH gleich sind, und daß die Puncte N, B, E, H auf dem Umfang eines Kreises liegen. (*) Folglich ist der Winkel NHB = (NEB, das ist,) HCD, und da dieß Wechselswinkel sind, so ist NH parallel mit CD, folglich auch mit LF.

Gleicherweise weil DE, BK parallel sind, so sind die Bogen DCB, EFK einander gleich, folglich sind die Winkel DCB, EFK, einander gleich. Hieraus folgt, daß die Winkel HCM, HFM gleich sind, und daß die Puncte H, C, F, M auf dem Umfang eines Kreises liegen. Folglich ist der Winkel HMC = (HFC, das ist,) MDE, und da dieß Wechselswinkel sind, so ist MH parallel mit DE, folglich auch mit BK. Demnach ist NHMD ein Parallelogramm.

Nun

(*) Wenn nämlich der, durch N, B, E beschriebene Kreis nicht durch H gienge, so müßte er die Linie EH in irgend einem andern Punct schneiden; woraus sich aber leicht eine Ungereimtheit herleiten läßt.

Nun ist in den △ △ G B N, F I M der Winkel GBN = (L B A, das ist,) (L F A oder) F I M, der Winkel B G N = (A B K oder A F K, das ist,) I F M, endlich ist der Winkel G N B = (N B K oder L F M, das ist,) F M I. Folglich sind die △ △ G N B, F M I einander ähnlich, mithin ist G N : N B = F M : M I. Nun ist angezeigtermaaßen der Winkel G N B = F M I, folglich ist der Winkel B N D = D M F. Ferner ist der Winkel N B D = (D F L oder) M D F, und der Winkel N D B = (D B K, das ist,) M F D; folglich sind die △ △ B N D, D M F einander ähnlich, und B N : N D = D M : M F; aus dieser und der vorhergehenden Proportion folgt G N : N D = D M : M I, mithin ist G N : G D = (D M : D I =) N H : D I, folglich *permutando*, G N : N H = G D : D I; folglich liegen die Puncte G, H, I in einer geraden Linie. Q. E. D.

Fall.

Wenn zwo einander gegenüber liegende Sehnen parallel sind, so ist der Satz immer noch wahr: man kann nämlich alsdann sagen, einer der Puncte G, H, I liege in einer unendlichen Entfernung von den andern, aber immer auf ebenderselben geraden Linie. Dieß erhellt aus der Figur: denn wenn man die sechs Puncte B, C, D, E, F, K, angenommen hätte, so wären H und M die Puncte, worin zwey Paare verlängerter Sehnen zusammenstoßen; nun ist bewiesenermaaßen H M parallel mit D E und B K, man kann daher sagen, diese drey Linien werden, ins Unendliche verlängert, einander begegnen: der Punct G liegt also unendlich weit von H. Gleicherweise, wenn alle drey Paare der gegenüberliegenden Sehnen parallel sind, das ist, wenn alle Sehnen gleich sind, so kann man sagen, die gerade Linie, worin die drey Puncte liegen, sey in einer unendlichen Entfernung von dem Kreis.

Anmerkung.

Dieser Satz ist von allen Kegelschnitten wahr; und Mylord Stanhope beweist ihn von den übrigen Kegelschnitten, indem er sie als perspectivische Projectionen von dem Kreise betrachtet.